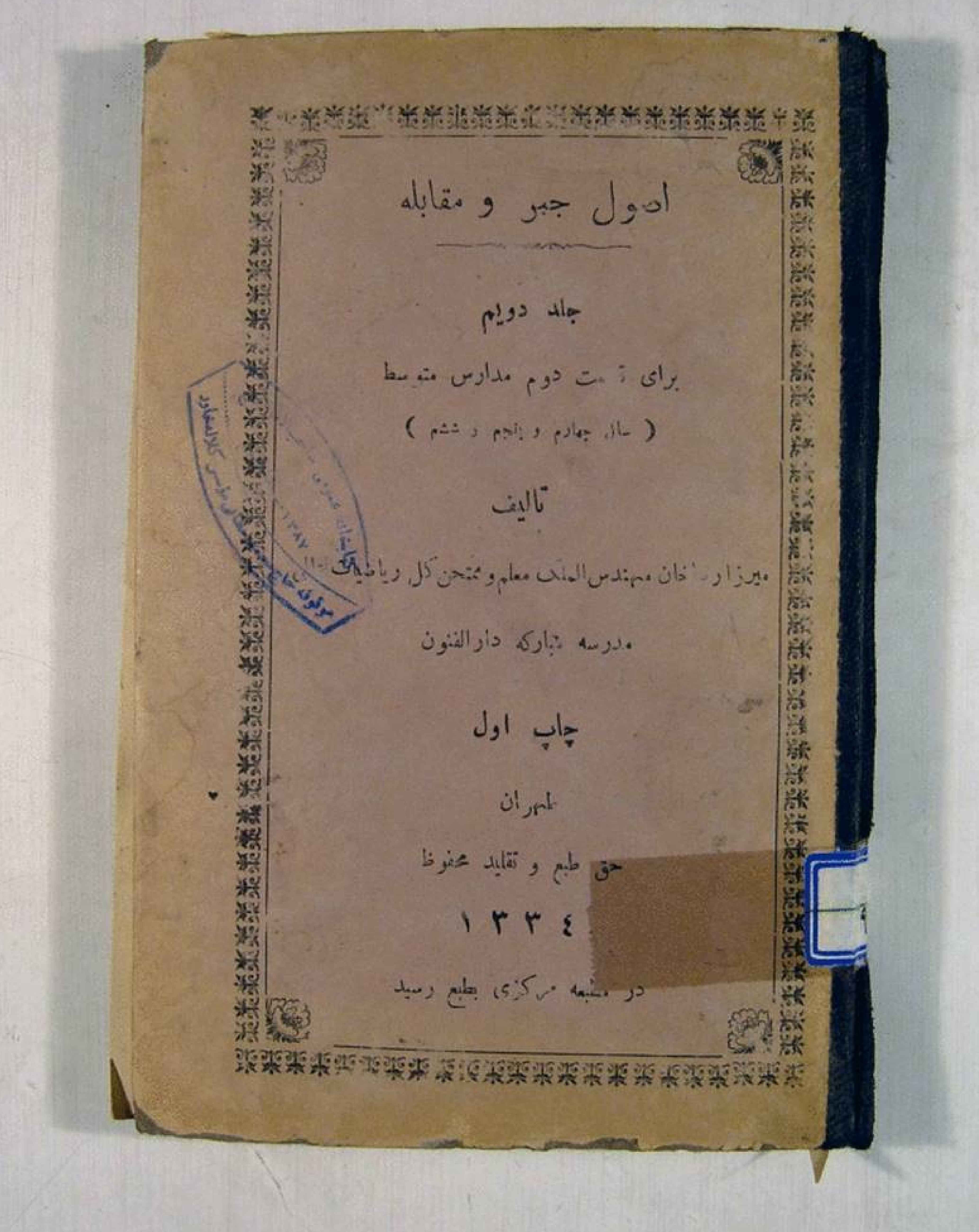


اصول جبر و مقابله

جلد دویم

برای قسمت دوم مدارس متوسط

(سال چهارم و پنجم و ششم)

تالیف

میرزا [illegible] خان مهندس الملک معلم و ممتحن کل ریاضیات

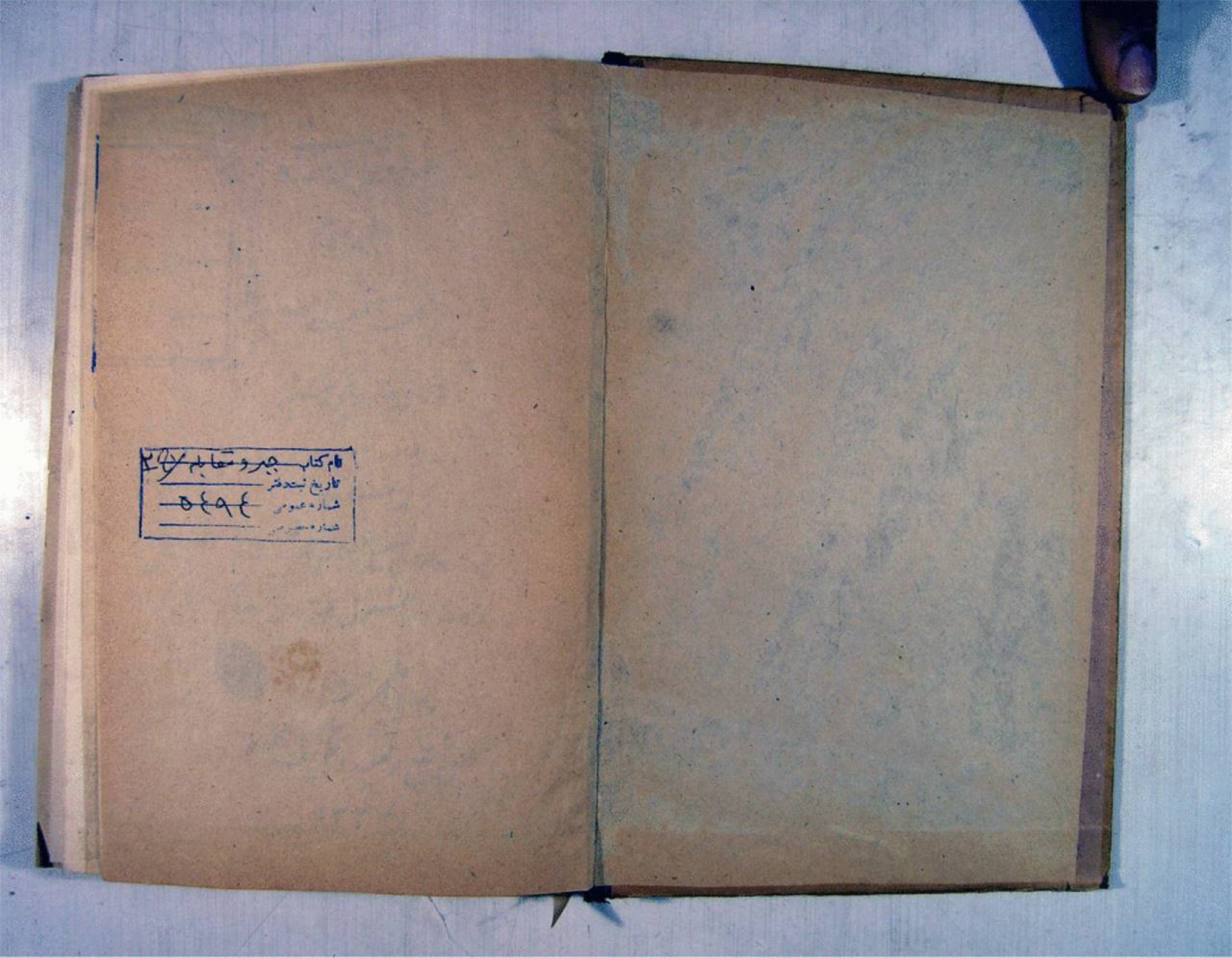
مدرسه مبارکه دار الفنون

چاپ اول

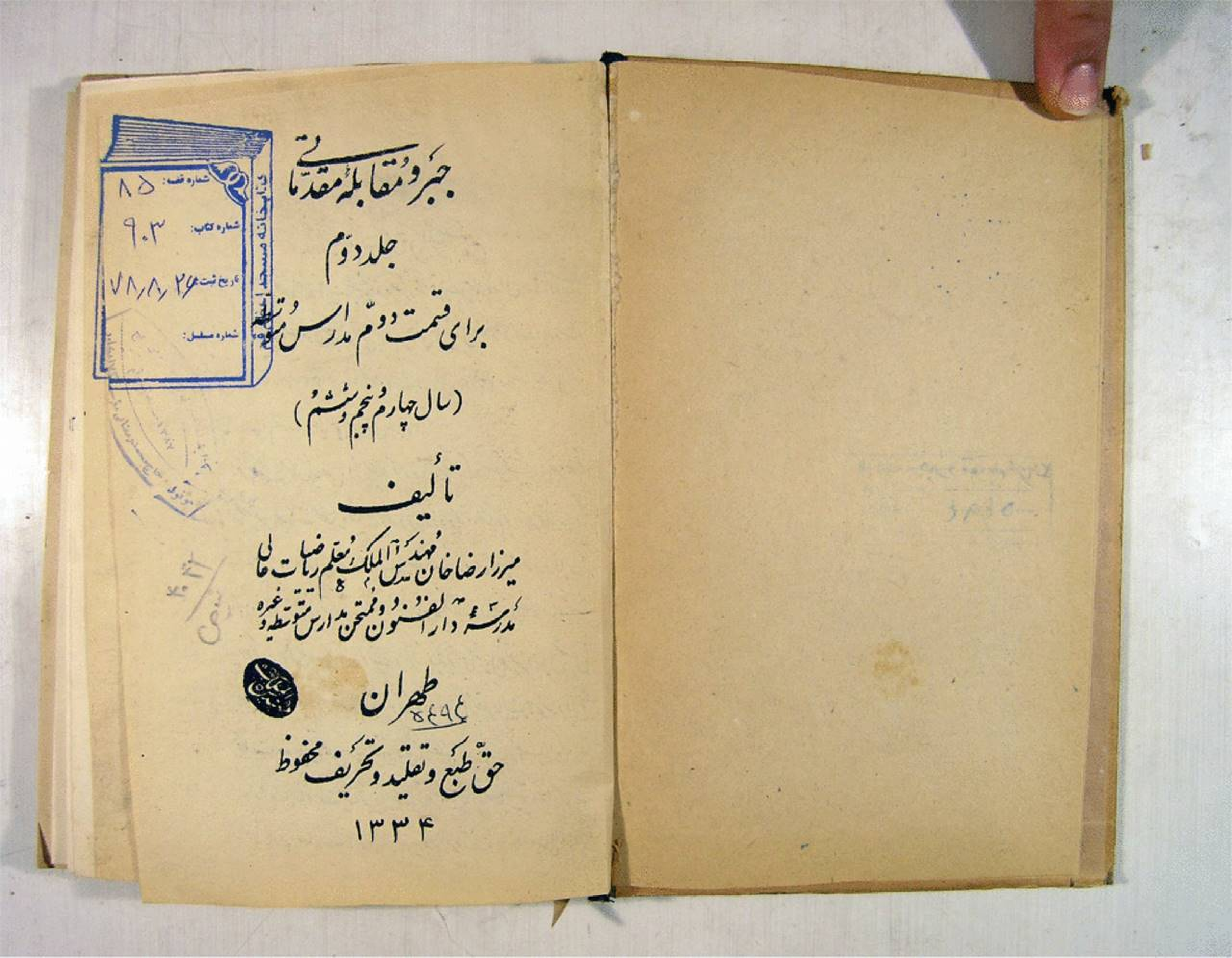
طهران

۱۳۳۴

در مطبعه مرکزی بطبع رسید



نام کتاب جبر و مقابله
تاریخ ثبت دفتر
شماره عمومی ۵۴۹۴
شماره خصوصی



جبر و مقابلهٔ مقدماتی

جلد دوم

برای قسمت دوم مدارس متوسطه

(سال چهارم و پنجم و ششم)

تألیف

میرزا رضاخان مهندس الملک معلم ریاضیات عالی
مدرسهٔ دار الفنون و ممتحن مدارس متوسطه و غیره

طهران

۱۳۳۴

دیباچه

بسم الله الرحمن الرحیم

بعد الحمد و الصلوة — این بنده حسن رضا قریب هیجده سال است در مدرسهٔ مبارکهٔ دار الفنون بسمت معلمی علوم ریاضی اشتغال دارد (ورود بمدرسه در سال ۱۳۰۵ و فراغت از تحصیلات در سال ۱۳۱۵ و انتصاب بمعلمی علوم ریاضی با فرمان رسمی در سال ۱۳۱۶)

مکرر شعب مختلفهٔ ریاضی را تدریس کرده و در هر شعبه که درس گفته کتابی بفراخور قوهٔ محصلین طبقات مختلفه تألیف و تدوین کرده و بمرور ایام بواسطهٔ تجارب در عمل تدریس و بمقتضای وقت اسلوب و سبک جدیدی اختیار نموده تا این اواخر که دورهٔ ابتدائی و متوسطهٔ مدارس عموماً و مدرسهٔ دار الفنون خصوصاً در تحت پروگرام مدارس فرنگ مرتب و منظم گردید برای تسهیل و تعمیم وسایل تحصیل این علوم شریفه در صدد برآمد که کتب مؤلفهٔ خود را پس از تصرفات لازمه و درج بعضی نکات و دقایق عمده که از معلمین و مهندسین اروپائی دار الفنون که این بنده بسمت معاونت ایشان را داشت اقتباس نموده مطابق پروگرام رسمی وزارت جلیلهٔ علوم و معارف با اسلوب پسندیده که امروز در تمام مدارس عالم معمول است

بتدریج بحلیهٔ طبع درآورد — اسامی کتب مؤلفه از این قرار است

دورهٔ ابتدائی

حساب در سه دوره — هندسه در دو دوره طبع شده — رسم هندسی در سه دوره

دورهٔ متوسطه

حساب استدلالی در تحت طبع است — هندسه در دو جلد طبع شده — جبر و مقابله دورهٔ اول — جبر و مقابله دورهٔ دوم در دو جلد طبع شده — مثلثات مستقیمة الخطوط طبع شده — هندسه دسکریپتیو علم تسطیح و تصویر مرتبه دار — هیئت جدید رسم هندسی در سه دوره .

دورهٔ عالی

جبر و مقابله تا آخر دیفرانسیل و انتگرال در دو جلد — هندسهٔ تحلیلی و مخروطات — هیئت عالی — مثلثات کروی — تیگرافی و نقشه برداری و تسویه — رسم نقشجات جغرافیائی — ژئودزی .

طبع کتب دورهٔ عالی که تا کنون دو مرتبه مختصراً تدریس شده منوط بکثرت داوطلبان ریاضیات عالی و ایجاد و تأسیس دار المعلمین و طبقهٔ مهندسی است

و با فضل ایزد با مساعدت وزارت جلیلهٔ معارف اتمام طبع دورهٔ ابتدائیه و متوسطه را که بیشتر محل حاجت است مقدم داشت بعون الله الملک الوهاب

هو الله تعالی

چون جناب آقا میرزا رضا خان مهندس الملک معلم و ممتحن کل ریاضیات عالیه دار الفنون از بدو فراغت از تحصیلات تاکنون قریب هیجده سال است در مدرسهٔ مبارکهٔ دار الفنون در شعب مختلفهٔ علوم ریاضی درس گفته اند و اغلب از شاگردان ایشان امروز در مدارس دولتی و غیره مشغول تدریس هستند و علاوه بر این مشار الیه در تألیف و تدوین کتب کلاسیکی شعب مختلفهٔ ریاضیات مطابق پروگرام رسمی وزارت معارف که امروز در تمام مدارس ایران معمول است رنج برده و زحمت فوق العاده کشیده اند لذا وزارت جلیلهٔ معارف قدر زحمات و خدمات معزی الیه را منظور نظر داشته تدریس کتب مؤلفهٔ ایشان را در مدارس ابتدائیه و متوسطه تصویب و تصدیق مینماید

جبر مقدماتی

فهرست مندرجات جلد دوم

مقالهٔ سوم — معادلات درجهٔ دوم

صفحات

صفحات

مقاله چهارم تصاعدات و لگاریتم

فصل بیست و یکم ــ مرابحهٔ مرکب و قسط السنین و استهلاک دین

مقالهٔ پنجم ــ مشتقات و تغییرات معرفات

فصل بیست و دوم ــ مشتقات

فصل بیست و سوم ــ استعمال مشتقات در تغییر معرفات

مقاله سوّم

معادلات درجهٔ دوّم

فصل سیزدهم

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوّم

۱ــ حلّ معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

۵۰۳ــ صورت کلّی معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوّم

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوّم آنستکه هرگاه جمیع جمل آن نسبت به x صحیح و منطق باشند جمله که شامل بزرگترین نمایندهٔ x است از درجهٔ دوّم باشد

هر معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوّم را میتوان پس از نقل جمیع جمل آن بطرف اوّل و اختصار جمل متشابه باین صورت کلّی ذیل درآورد

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

چنین معادلهٔ کلّیه شامل سه قسم جمله است جملهٔ درجهٔ دوّم ax^2 و جملهٔ درجهٔ اوّل bx و جملهٔ معلوم c که بترتیب پس از اختصار جمل متشابهٔ درجهٔ دوم و درجهٔ اوّل و جمل معلومه صورت گرفته باشند

ضرایب a و b و c مقادیر معلومه اند که میتوانند مثبت باشند
یا منفی و یک جمله یا کثیر الجمله و علاوه بر این ممکنست b
و c صفر باشند و امّا a را همواره مخالف صفر فرض میکنیم زیرا که
اگر a صفر باشد معادله از درجه دوّم نخواهد بود و منجر شود بدرجه اوّل
و وقتیکه b و c مخالف صفر باشند معادله را کامل گویند و اگر
یکی از این دو ضریب یا هر دو یکمرتبه صفر باشند معادله را ناقص نامند
و معادله بیکی از این سه صورت ذیل در آید

$$ax^2+c=0 \quad ، \quad ax^2+bx=0 \quad ، \quad ax^2=0$$

حل کردن معادلهٔ درجه دوّم عبارتست از یافتن مقادیر مثبته
یا منفیه که چون بجای x در معادله قرار دهیم صدق کنند یعنی
مقدار سه جملهٔ درجهٔ دوّم ax^2+bx+c را صفر کنند و چنین
مقادیر را ریشه های معادله نامند

مثلاً هرگاه در معادلهٔ درجه دوّم $3x^2-14x+8=0$ بجای
x متدرجاً عدد ۴ و $\frac{2}{3}$ را قرار دهیم مقدار سه جمله صفر میشود
پس این دو عدد ریشه های معادله میباشند

۳۰۱ — **حلّ معادلهٔ ناقص درجه دوّم** — اوّلاً فرض
میکنیم $b=0$ یعنی جملهٔ درجه اوّل مفقود باشد و معادله باین صورت
در آید $ax^2+c=0$ و چون جملهٔ معلوم c را بطرف ثانی نقل کنیم
و طرفین را بر a که مخالف صفر است قسمت کنیم حاصل میشود
$x^2=\frac{-c}{a}$ و محض اختصار چنین قرار میدهیم $A=\frac{-c}{a}$ پس $x^2=A$
و حال اگر فرض کنیم A مثبت باشد همواره میتوان عدد مثبتِ
صحیح یا اصمّی یافت که مجذورش مساوی A باشد و چنین عدد عبارتست
از جذر حسابی و آنرا باین صورت مینمائیم $\sqrt{A}$ و واضح است که
$\sqrt{A}$ یک ریشهٔ معادله است و امّا چون ملاحظه کنیم که مجذور $-\sqrt{A}$
نیز A است چنانچه بجای x در معادله قرار دهیم صدق کند
پس معادلهٔ مفروضه دو ریشهٔ حقیقی و مختلفة العلامه قبول کند
$x=+\sqrt{A}$ و $x=-\sqrt{A}$ ولکن بحسب معاهده عادت
بر این جاری شده که هر دو ریشه را متحداً در یک دستور قرار دهند و
چنین نویسند $x=\pm\sqrt{A}=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ و علاوه بر این معادلهٔ
مفروضه نتواند اجوبهٔ دیگر قبول کند زیرا که مجذور هر عدد مثبت

یا منفی دیگر مخالف A خواهد بود

و هرگاه A منفی باشد معادله مفروضه هیچ ریشه قبول نکند زیرا
که مجذور هر عدد غیر مشخصی مثبت یا منفی همواره مثبت است و نتواند
هرگز مساوی عدد منفی A گردد و در اینحالت ریشه های معادله را
موهومی مینامند

و باید خوب ملتفت شد که هرگاه ضریب a و c مختلفة العلامه باشند
معادله دارای دو ریشه خواهد بود و اگر a و c متحد العلامه باشند
معادله هیچ ریشه قبول نکند مثلاً فرض میکنیم این معادله را
$\frac{x}{x+2}=\frac{9x-18}{5x}$ و پس از اختصار چنین میشود $4x^2-36=0$
یا $x^2=9$ و از آنجا $x=\pm 3$ و یا چون دو ریشه را به
x' و x'' بنامیم $x'=+3$ و $x''=-3$ پس معادله مفروضه فقط
دو ریشه ۳+ و ۳- قبول کند

ثانیاً فرض میکنیم $c=0$ یعنی جمله معلوم مفقود باشد پس معادله
کلی منجر شود باین صورت $ax^2+bx=0$
یا $x(ax+b)=0$

و چون شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب دو عامل صفر باشد
آنستکه یکی از آندو عامل صفر باشد

بنابراین میتوان معادله مفروضه را بر دو معادله درجه اول تجزیه
کرده چنین قرار داد $x=0$ و $ax+b=0$ و در اینصورت
باز معادله دارای دو ریشه خواهد بود $x'=0$ و $x''=-\frac{b}{a}$ مثلاً
فرض میکنیم این معادله را $(x-1)(x-2)=2$ و پس از اختصار
چنین میشود $x^2-3x=0$ یا $x(x-3)=0$ و از آنجا $x'=0$ و $x''=3$

ثالثاً هرگاه b و c هردو یکمرتبه صفر باشند معادله کلی منجر شود باین
صورت $ax^2=0$ و هر دو ریشه صفر میگردد

۳۰۲ — **حل معادله کلی** — حال فرض میکنیم معادله کلی
درجه دوم ذیل را $ax^2+bx+c=0$ و چون a مخالف
صفر است معادله را در $4a$ ضرب میکنیم حاصل میشود
$4a^2x^2+4abx+4ac=0$ و $4ac$ را نقل میکنیم بطرف
ثانی چنین میشود $4a^2x^2+4abx=-4ac$ و چون ملاحظه کنیم که
دو جمله طرف اول معادله یعنی $4a^2x^2+4abx$ عبارتست از دو جمله

اول مجذور ($2ax+b$) زیرا که

$$(2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$

پس برای اینکه طرف اول معادله را مجذور کامل نمائیم بر دو طرف این معادله مقدار b^2 را میفزائیم چنین حاصل میشود

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

یا

$$(2ax+b)^2 = b^2 - 4ac$$

و این معادله معادل است با معادلهٔ مفروضه و چون در این معادلهٔ جدید طرف اول مجذور کامل است پس بحسب علامت b^2-4ac ممکن است سه حالت اتفاق افتد

اولاً فرض میکنیم $b^2-4ac>0$ در اینحالت معادله دارای دو ریشه متمایزه خواهد بود زیرا که چون از طرفین معادله جذر استخراج کنیم چنین میشود

$$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

و از آنجا

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (۲)$$

و چون دو ریشه را از یکدیگر جدا نموده به x' و x'' بنمائیم چنین میشود

$$(۳) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

هرچند ممکن است رشته اعمال لازمه در ضرایب را برای حساب کردن ریشه‌ها در این دستور به بیان متعارفی درآورد ولکن بهتر آنست که این دستور را بخاطر سپرد و عمل کرد هرگاه ضریب b عدد زوج باشد میتوان دستور کلی را مختصر نمود پس اگر قرار دهیم $b=2b'$ دستور (۲) چنین میشود

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

و یا چون دو جمله کسر را بر ۲ قسمت کنیم چنین حاصل میشود

$$(۴) \qquad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

ثانیاً فرض میکنیم $b^2-4ac=0$ در اینحالت معادلهٔ $(2ax+b)^2 = b^2-4ac$ که معادلست با معادلهٔ مفروضه باین صورت درآید $(2ax+b)^2 = 0$ پس برای اینکه طرف اول این معادله صفر گردد لازم و کافیست که چنین باشد $2ax+b=0$ و از اینجا $x = -\frac{b}{2a}$ پس وقتیکه $b^2-4ac=0$ معادله درجهٔ دوم دارای

یک ریشه است ولکن باز در این حالت مخصوص گویند معادله دارای دو ریشهٔ مضاعف یا دو ریشهٔ متساویه است زیرا که فرض میکنیم مقدار b^2-4ac مثبت و بسیار کوچک باشد پس دو ریشهٔ غیر متساویه که از دستور (۳) بدست میآیند اختلافشان با $-\frac{b}{2a}$ مقدار جزئی $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ است یکی اضافی و دیگری نقصانی ولکن چون b^2-4ac تدریجاً میل کند بسمت صفر $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ نیز متمایل شود بسمت صفر و دو ریشهٔ مذکوره نزدیک شوند به $-\frac{b}{2a}$ و بالاخره در حدّ وقتیکه b^2-4ac رسد بصفر این دو ریشه نیز میرسند به $-\frac{b}{2a}$ و هر دو متساوی میگردند

ثالثاً فرض میکنیم $b^2-4ac<0$ در اینحالت معادلهٔ $(2ax+b)^2=b^2-4ac$ که معادلست با معادلهٔ مفروضه محال خواهد بود زیرا که طرف ثانی این معادله عدد منفی است و طرف اوّل آن مجذور کامل است و چون مجذور هر عدد غیر مشخصی مثبت یا منفی همواره مثبت است پس هر مقداریکه بجای x قرار دهیم طرف اوّل معادله مثبت خواهد بود و مساوی طرف ثانی که عدد منفی است نمیگردد بنابراین معادلهٔ هیچ

ریشه قبول نکند ولکن محض تعمیم دستورات بحسب معاهده که عنقریب مذکور خواهد شد گویند که معادله دارای دو ریشهٔ موهومی است

پس از آنچه مقدم شد می‌بینیم که مقدار b^2-4ac در اصول معادلات درجهٔ دوّم دارای عمل اصلی مهمّی است چنانکه جنس ریشه‌های ax^2+bx+c تابع علامت b^2-4ac است و این مقدار مهم را دیسکریمینان نامند (discriminant) بنابراین قبل از حلّ معادلهٔ درجهٔ دوّم چون دیسکریمینان را تشکیل دهیم علامت آن جنس ریشه‌ها را معلوم مینماید پس خلاصه نتایج مذکوره فوق چنین میشود

اولاً $b^2-4ac>0$ دو ریشهٔ معادله حقیقی و مختلفه اند

ثانیاً $b^2-4ac=0$ دو ریشهٔ معادله حقیقی و متساویند

ثالثاً $b^2-4ac<0$ معادله ریشه ندارد یا اینکه گوئیم ریشه‌های معادله موهومی باشند

۳۰۳ - تبصره - وقتیکه ضریب a و c مختلفة العلامه باشند حاصل ضرب ac منفی است و b^2-4ac بالضروره مثبت است پس در این صورت ریشه‌های معادله حقیقی و مختلفه باشند

مثال ۱ — فرض میکنیم این معادله را $5x^2-17x-12=0$ چون $b^2-4ac=17^2+4\times5\times12=529$ مثبت است پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز خواهد بود

$$x=\frac{17\pm\sqrt{17^2+4\times5\times12}}{10}=\frac{17\pm\sqrt{529}}{10}=\frac{17\pm23}{10}$$

$$x'=\frac{17-23}{10}=-\frac{3}{5}\quad\text{و}\quad x''=\frac{17+23}{10}=4$$

مثال ۲ — این معادله را حل کنید $3x^2-14x+8=0$ چون b زوج است پس این معادله از روی دستور (۴) حل میشود

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-3\times8}}{3}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{3}=\frac{7\pm5}{3}$$

و از آنجا $x'=\frac{7-5}{3}=\frac{2}{3}$ و $x''=\frac{7+5}{3}=4$

مثال ۳ — حل کنید این معادله را $9x^2-30x+25=0$ چون دیسکریمینان ($b^2-4ac=30^2-4\times9\times25=0$) مساوی صفر است پس معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف است $x=\frac{30}{18}=\frac{5}{3}$

مثال ۴ — حل کنید این معادله را $7x^2+3x+5=0$ چون دیسکریمینان ($b^2-4ac=3^2-140=-131$) منفی است پس معادله ریشه ندارد

۲۰۴ — اغلب معادلهٔ درجهٔ دوم را باین صورت در آورند

$$x^2+px+q=0$$

برای تبدیل معادلهٔ کلی $ax^2+bx+c=0$ بصورت فوق کافیست که طرفین آنرا بر a قسمت کنیم تا چنین شود $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ و بعد چنین قرار دهیم $\frac{b}{a}=p$ و $\frac{c}{a}=q$ و چون در فورمول

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

بجای $\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ مقادیرشان p و q را قرار دهیم این فورمول نتیجه شود $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ پس ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ از روی همین فورمول بدست آیند و ریشه‌های این معادله ممکن است مختلف یا متساوی یا موهومی باشند بحسب آنکه $\frac{p^2}{4}-q$ مثبت یا صفر یا منفی باشد

۲۰۵ — **مقادیر موهومی** — مقدار موهومی آنست که حاصل جذر عدد منفی باشد مانند $\sqrt{-1}$ و $\sqrt{-a^2}$ و $17+3\sqrt{-10}$ و ابداً نمایش هیچ مقدار حقیقی نباشد بلکه فقط بمنزلهٔ رمز مخصوصی است که برای وسیلهٔ تعمیم دستورات در جبر داخل شده است و در اصول معادلات درجات عالیه دارای عمل مهمی است و از روی معادلات مقرره جمیع

قواعد محاسبه مربوطه در مقادیر حقیقی را در مقادیر موهومی نیز استعمال
کنند مخصوصاً جذر $\sqrt{A}$ را همواره مساوی A فرض میکنیم اگرچه A
منفی باشد مثلاً $(\sqrt{-5})^2 = -5$ و ما در اینجا داخل در بحث مقادیر
موهومی نمیشویم و فقط اکتفا کنیم بذکر اینکه بوسیلهٔ این معادلات
چگونه میتوان ریشه های موهومی درجه دوم را تبدیل نمود بصورت دیگر
که جزء $\sqrt{-1}$ شامل رادیکال موهومی دیگر نباشد

در حل معادله درجهٔ دوم چنانچه دیده شد در صورتیکه $b^2 - 4ac < 0$
معادله ریشه ندارد یعنی هیچ عدد مثبت یا منفی یا صفر نمی توان یافت
که چون بجای x قرار دهیم در معادله صدق نماید پس مقادیریکه از
دستور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ بدست آیند موهومی باشند و
بنابراین چون $b^2 - 4ac$ منفی است پس $4ac - b^2$ مثبت باشد
فرض میکنیم $\sqrt{4ac - b^2} = m$ پس $4ac - b^2 = m^2$ و بعد
$b^2 - 4ac = -m^2 = m^2 \times (-1)$ پس فورمول درجه دوم چنین میشود

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{m^2 \times (-1)}}{2a} = \frac{-b \pm m\sqrt{-1}}{2a}$$

محض اختصار کتابت چنین قرار میدهیم $\alpha = -\frac{b}{2a}$ و

$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{m}{2a}$ پس فورمول سابق باینصورت درآید
$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ ولکن اغلب چنین قرار دهند $\sqrt{-1} = i$
بنابراین فورمول کلی ریشه های موهومی درجهٔ دوم باین صورت خواهد
بود $\alpha \pm i\beta$ و این فورمول مرکبست از یک جملهٔ حقیقی α و از یک
جملهٔ موهومی که حاصل ضرب i باشد در عامل حقیقی β مثلاً فرض میکنیم
این معادله را $2x^2 - 6x + 17 = 0$ از دستور (۲) چنین بدست
میآید $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 34}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-25}}{2}$ و چون
$\sqrt{-25} = 5\sqrt{-1} = 5i = i5$ پس $x = \frac{3}{2} \pm i\frac{5}{2}$

دو عبارت موهومی $\alpha + i\beta$ و $\alpha - i\beta$ را مزدوج یکدیگر گویند پس
دو ریشه موهومی درجهٔ دوم همواره مزدوج باشند و علاوه براین مجموع
دو مقدار موهومی مزدوجه حقیقی است زیرا که $\alpha + i\beta + \alpha - i\beta = 2\alpha$
و همچنین حاصل ضرب دو مقدار مزدوجه نیز حقیقی باشد زیرا که
$(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 - i^2\beta^2$ و چون بحسب معاهده $i^2 = -1$
پس $(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2$

۳ــ روابط مابین ضرایب و ریشه های معادله درجهٔ دوم

۲۰۶ – **قضیه** – حاصل جمع دو ریشه معادلهٔ درجهٔ دوم مساویست با $\frac{-b}{a}$ یعنی خارج قسمت ضریب جملهٔ درجهٔ اول x با علامت مخالف بر ضریب جملهٔ درجهٔ دوم x^2 و حاصل ضرب دو ریشه مساویست با $\frac{c}{a}$ یعنی خارج قسمت جملهٔ معلوم بر ضریب جملهٔ درجهٔ دوم

چون دو ریشه معادله را x' و x'' فرض کنیم چنین خواهیم داشت

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

این دو تساوی را عضو به عضو با یکدیگر جمع میکنیم حاصل میشود

$$x'+x'' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

و چون همین دو تساوی را عضو به عضو در یکدیگر ضرب کنیم و ملاحظه کنیم که حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضلشان مساویست با تفاضل مجذورات دو عدد پس چنین خواهیم داشت

$$x' \times x'' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a \times 2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

۲۰۷ – هرگاه معادلهٔ درجهٔ دوم بصورت ذیل باشد $x^2+px+q=0$

روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها چنین میشود $x'+x''=-p$ و $x'x''=q$

۲۰۸ – علامات ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم –

از روی قضیهٔ مذکوره فوق میتوان علامات ریشه‌های درجهٔ دوم را بدون حل معادله بیک نظر بدست آورد مشروط براینکه مطمئن باشیم که ریشه‌های معادله حقیقی هستند

هرگاه $\frac{c}{a}$ یعنی حاصل ضرب دو ریشه مثبت باشد این دو ریشه یک علامتند و هر دو بعلامت حاصل جمعشان $\frac{-b}{a}$ باشند و اگر $\frac{c}{a}$ منفی باشد دو ریشه مختلف العلامه اند و حاصل جمعشان $\frac{-b}{a}$ بعلامت آنکه بحسب مقدار مطلق بزرگتر باشد و اگر $\frac{c}{a}$ صفر باشد یکی از ریشه‌ها صفر و دیگری مساویست با $\frac{-b}{a}$ و ما خلاصه نتایج مذکوره را در جدول ذیل آورده‌ایم

$b^2-4ac>0$:

- $\frac{c}{a}>0$:
  - $-\frac{b}{a}>0$ دو ریشه مثبت است
  - $-\frac{b}{a}<0$ دو ریشه منفی است
- $\frac{c}{a}<0$: دو ریشه مختلف العلامه اند و آنکه بحسب مقدار مطلق بزرگتر باشد بعلامت $\frac{-b}{a}$ است
- $\frac{c}{a}=0$: یک ریشه صفر و یک ریشه مساویست با $\frac{-b}{a}$

دو ریشه متساوی با $-\frac{b}{2a}$ و بعلامت $\frac{-b}{a}$ $\qquad b^{2}-4ac=0$

معادله ریشه ندارد $\qquad b^{2}-4ac<0$

مثال- فرض میکنیم چهار معادله ذیل را

$$(۱)\ ۳x^{۲}+۱۶x+۵=۰ \quad (۲)\ ۳x^{۲}+۱۶x+۵=۰$$

$$(۳)\ ۳x^{۲}-۱۶x-۵=۰ \quad (۴)\ ۳x^{۲}+۱۶x-۵=۰$$

ریشه های این معادلات جمیعاً حقیقی هستند چونکه در دو معادله اول $b'^{۲}-ac=۸^{۲}-۳\times۵$ مثبت است و در دو معادله دیگر جمله آخر c یعنی ۵ منفی است و اما ریشه های معادله (۱) مثبتند چونکه حاصل ضربشان $\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{۵}{۳}$ مثبت است پس دو ریشه متحد العلامه اند و حاصل جمعشان $\frac{-b}{a}$ یعنی $\frac{۱۶}{۳}$ نیز مثبت است ولکن در معادله (۲) ریشه ها منفی باشند چونکه حاصل ضربشان $\frac{۵}{۳}$ مثبت است پس متحد العلامه اند و حاصل جمعشان $-\frac{۱۶}{۳}$ منفی است و در معادله (۳) و (۴) یک ریشه مثبت است و دیگر ریشه منفی چونکه حاصل ضربشان $\frac{-۵}{۳}$ منفی است و اما در معادله (۳) حاصل جمع دو ریشه $\frac{۱۶}{۳}$ است پس آنکه بحسب مقدار مطلق بزرگتر باشد مثبت است ولکن در معادله چهارم ریشه بحسب مقدار مطلق بزرگتر منفی است چونکه مجموع دو ریشه $-\frac{۱۶}{۳}$ منفی است

۳۰۹- **مسئله**- دو عدد معلوم کنید که مجموعشان s باشد و حاصل ضربشان p از روی روابط ما بین ضرایب و ریشه ها مستقیماً معلوم میشود که دو عدد مطلوب ریشه های معادله درجه دوم ذیل هستند $x^{۲}-sx+p=۰$ (۱) چونکه مجموع دو ریشه s و حاصل ضربشان p است در صورتیکه فرض کنیم $s^{۲}-۴p>۰$ و علاوه بر این بسهولت میتوان ثابت کرد که قطعاً ریشه های این معادله در مسئله فوق صدق میکنند زیرا که فرض میکنیم x و y دو عدد مطلوب باشند پس این دو معادله صورت می بندد $x+y=s$ و $xy=p$ ولکن این دو معادله معادلند با دو معادله ذیل $x^{۲}-sx+p=۰$ و $y=s-x$ پس x یعنی یکی از دو عدد مطلوب مساوی یکی از دو ریشه معادله (۱) خواهد بود و عدد دیگر y بالضروره مساوی باید $s-x$ یعنی ریشه دیگر این معادله چونکه مجموع دو ریشه معادله (۱) مساویست با s

مثال- دو عدد معلوم کنید که مجموعشان ۱۳ و حاصل ضربشان ۴۰ باشد این دو عدد ریشه های معادله ذیل هستند $x^{۲}-۱۳x+۴۰=۰$

و چون این معادله را حل کنیم دو ریشه چنین میشود

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 40\times 4}}{2} = \frac{13 \pm 3}{2}$ و از آنجا $x' = 8$ و $x'' = 5$

۳۱۰ - **تبدیلات معادله درجهٔ دوم** — مسئله میخواهیم معادلهٔ درجهٔ دوم تشکیل دهیم که ریشه هایش مساوی باشند با ریشه های معادلهٔ مفروضهٔ ذیل بانضمام عدد h $ax^2+bx+c=0$ (۱)

فرض میکنیم x' و x'' ریشه های معادلهٔ (۱) باشند پس ریشه های معادلهٔ مطلوب چنین میشوند $x'+h$ و $x''+h$ و مجموعشان چنین میشود

$x'+x''+2h = -\frac{b}{a}+2h$ و حاصل ضربشان

$$(x'+h)(x''+h) = x'.x''+h(x'+x'')+h^2 = \frac{c}{a}-\frac{hb}{a}+h^2$$

پس معادلهٔ درجهٔ دوم مطلوب باین صورت درآید

$$ax^2+(b-2ah)x+ah^2-bh+c=0 \quad (۲)$$

و باید دانست که عدد h را میتوان چنان اختیار نمود که صورت معادلهٔ (۲) بسیار بسیط باشد مثلاً اگر فرض کنیم $h=\frac{b}{2a}$ آنوقت معادلهٔ (۲) شامل جملهٔ x نخواهد بود و باین صورت درآید $ax^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$

یا $x^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ پس اگر $b^2-4ac \geq 0$ معادله دارای دو ریشه خواهد بود $x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و چون از ریشه های

این معادله مقدار h یعنی $\frac{b}{2a}$ را نقصان کنیم ریشه های معادلهٔ (۱) بدست آیند

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

۳۱۱ - **تبصره** — از روی همین قاعدهٔ مذکوره میتوان معادلهٔ درجهٔ دوم تشکیل داد که ریشه هایش kx' و kx'' باشند (k عدد مفروضی است) و یا $\frac{1}{x'}$ و $\frac{1}{x''}$ و چنین معادلات را عموماً تبدیلات معادلهٔ مفروضه بر $x+h$ و kx و $\frac{1}{x}$ گویند و بطور کلی هر معادله را تبدیل معادلهٔ مفروضه بر $f(x)$ گوئیم ($f(x)$ معرف معلومی است از x) در صورتیکه ریشه هایش مقادیر عددیهٔ $f(x')$ و $f(x'')$ باشند یعنی مقادیری که معرف $f(x)$ حاصل کند وقتیکه بجای x در آن معرف مقادیر x' و x'' ریشه های معادلهٔ مفروضه را قرار دهیم

و علاوه بر این میتوان تبدیلات بر $x+h$ و kx و $\frac{1}{x}$ را بطریق سهلی مستقیماً بدست آورد مثلاً فرض میکنیم x ریشهٔ معادلهٔ تبدیل بر $x+h$ باشد پس ریشهٔ معادلهٔ (۱) چنین میشود $x-h$ و از آنجا این معادله تشکیل میگردد $a(x-h)^2+b(x-h)+c=0$

و این معادلهٔ مطلوب بعینه همان معادلهٔ (۲) است که سابق تشکیل دادیم

و همچنین هرگاه x یک ریشه از معادله تبدیل به kx باشد پس $\frac{x}{k}$ یک ریشه از معادله (۱) خواهد بود و آنوقت این معادله صورت بندد

$$ax^2+bkx+ck^2=0 \quad \text{و یا} \quad a\frac{x^2}{k^2}+b\frac{x}{k}+c=0$$

و این معادله تبدیلی مطلوب باشد و همچنین معادله تبدیل به $\frac{1}{x}$ نیز باین صورت ذیل خواهد بود $a\left(\frac{1}{x}\right)^2+b\frac{1}{x}+c=0$

و یا $cx^2+bx+a=0$ و ریشه های این معادله عکس ریشه های معادله (۱) میباشند

۳۱۲ — حاصل جمع قوای متشابه ریشه ها

— فرض میکنیم x' و x'' ریشه های معادله ذیل باشند $ax^2+bx+c=0$ (۱)

میخواهیم مجموعات $x'+x''$ و $x'^2+x''^2$ و $x'^3+x''^3$ و ...... و $x'^n+x''^n$ را حساب کنیم این مجموعات را به S_1 و S_2 ...... و S_n مینمائیم

و چون x' و x'' ریشه های معادله (۱) هستند پس این دو تساوی ذیل حاصل میشود $ax'^2+bx'+c=0$ (۲) $ax''^2+bx''+c=0$ (۳)

و چون این دو تساوی را عضو بعضو بیفزائیم چنین میشود

$$a(x'^2+x''^2)+b(x'+x'')+2c=0$$

و یا چون فرض کنیم $S_1=x'+x''$ چنین حاصل میشود $aS_2+bS_1+2c=0$

و چون مقدار S_1 مساوی است با $-\frac{b}{a}$ پس دستور مجموع مجذور دو ریشه چنین میشود $S_2=x'^2+x''^2=-\frac{bS_1+2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ و حال اگر دو طرف تساوی (۲) را در x' ضرب کنیم و همچنین دو طرف تساوی (۳) را در x'' و دو حاصل را عضو بعضو جمع کنیم چنین حاصل میشود

$$a(x'^3+x''^3)+b(x'^2+x''^2)+c(x'+x'')\equiv 0$$

یا $aS_3+bS_2+cS_1=0$ ولکن چون مقدار S_1 و S_2 معلوم است پس دستور S_3 چنین میشود $S_3=-\frac{bS_2+cS_1}{a}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$

و بطور کلی دو طرف تساوی (۲) را در x'^{n-2} ضرب میکنیم و دو طرف تساوی (۳) را در x''^{n-2} و دو حاصل را عضو بعضو جمع کنیم چنین حاصل میشود

$$a(x'^n+x''^n)+b(x'^{n-1}+x''^{n-1})+c(x'^{n-2}+x''^{n-2})\equiv 0$$

یا
$$aS_n+bS_{n-1}+cS_{n-2}=0 \quad (۴)$$

و از روی این فرمول ظاهر است که هرگاه S_{n-1} و S_{n-2} در دست باشد S_n معلوم میگردد یعنی $S_n=-\frac{bS_{n-1}+cS_{n-2}}{a}$ زیرا که اگر S_1 و S_2 در دست باشد و $n=3$ پس S_3 معلوم میگردد و اگر S_2 و S_3 معلوم باشد و $n=4$

پس S_4 بدست میآید و هکذا بنابراین هرگاه مقدار n را متدرجاً ۳ و ۴ و ۵ و ...
فرض کنیم از روی فرمول (۲) میتوان متدرجاً مقادیر S_3 و S_4 و S_5 و ...
را معلوم نمود در صورتیکه S_2 و S_1 در دست باشند

و هرگاه معادله درجه دوم بصورت بسیط ذیل باشد $x^2+px+q=0$
در این صورت فرمول (۲) چنین میشود $S_n=-pS_{n-1}-qS_{n-2}$ و دستورات
اولیه نیز چنین خواهد بود $S_1=-p$ و $S_2=p^2-2q$ و $S_3=3pq-p^3$
و جمیع این مجموعات کثیرالجمله های صحیحی هستند نسبت به p و q

۲۱۳ — مجموعات قوای صحیحه و منفیه ریشه های معادله درجه دوم را نیز
میتوان بسهولت حساب نمود زیرا که چون تساوی محقق ذیل را قرار دهیم

$$S_{-n}=x'^{-n}+x''^{-n}=\frac{1}{x'^n}+\frac{1}{x''^n}=\left(\frac{1}{x'}\right)^n+\left(\frac{1}{x''}\right)^n$$

می بینیم که این مجموعات
عبارتند از مجموعات قوای متشابه معادله که ریشه هایش $\frac{1}{x'}$ و $\frac{1}{x''}$ باشند یعنی
عکس ریشه های معادله مفروضه (۱) و ما سابقاً دیدیم که چنین معادله بصورت
ذیل خواهد بود $cx^2+bx+a=0$ پس باید بطریق حالت اول عمل نمود و از
روی فرمولات سابقه چنین حاصل میشود $cS_{-2}+bS_{-1}+2a=0$
در صورتیکه $S_{-1}=\frac{-b}{c}$ و بطور کلی $cS_{-n}+bS_{-(n-1)}+aS_{-(n-2)}=0$

پس از روی این فرمول کلی میتوان متدرجاً مجموعات S_{-3} و S_{-4} و S_{-5} و ...
را معلوم نمود مثلاً مجموعات اولیه چنین خواهند بود $S_{-1}=\frac{-b}{c}$

$$S_{-2}=\frac{b^2-2ac}{c^2} \text{ و } S_{-3}=\frac{3abc-b^3}{c^3}$$ و هکذا

علاوه براین باید ملتفت بود که میتوان تساوی ذیل را حاصل نمود

$$S_{-n}=\frac{1}{x'^n}+\frac{1}{x''^n}=\frac{x'^n+x''^n}{x'^n\cdot x''^n}=\frac{S_n}{\left(\frac{c}{a}\right)^n}=\frac{a^n}{c^n}\cdot S_n$$

و از اینجا ظاهر است که هرگاه S_n معلوم باشد میتوان مقدار S_{-n} را مستقیماً بدست آورد

مثال ۱ — مقدار اکسپرسیون ذیل را حساب کنید
$A=x'^3+x''^3+3x'^4x''^2+3x'^2x''^4$ در صورتیکه x' و x'' ریشه های
این معادله باشند $ax^2+bx+c=0$ — تساوی فوق را چنین میتوان
نوشت

$$A=x'^3+x''^3+3x'^2x''^2(x'^2+x''^2)$$

و از آنجا

$$A=\frac{3abc-b^3}{a^3}+3\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

مثال ۲ — تبدیل معادله $x^2+px+q=0$ را بحسب x^3 تشکیل دهید
هرگاه x' و x'' ریشه های معادله مفروض باشند ریشه های معادله مطلوب
چنین میشوند x'^3 و x''^3 و مجموع آنها چنین خواهد شد $x'^3+x''^3=3pq-p^3$
و حاصل ضربشان میشود $x'^3x''^3=(x'x'')^3=q^3$ بنابراین معادله مطلوب

بانصورت خواهد بود $x^2 - (3pq - p^3)x + q^3 = 0$

۳ — حالیکه ضریب a صفر باشد

۳۱۴ — در حل معادلهٔ کلی درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ (۱)
تاکنون a را مخالف صفر فرض کردیم و اگر a صفر باشد معادله منجر شود
بدرجهٔ اوّل $bx + c = 0$ و فقط یک ریشه $x = \frac{-c}{b}$ قبول کند
($b \neq 0$) ولکن برای ارتباط این حالت مخصوص با حالت کلّی فرض میکنیم
a ابتدا مخالف صفر و امّا بی نهایت کوچک باشد و تحقیق میکنیم که هرگاه b و
c ثابت باشند و a میل کند بسمت صفر ریشه های معادله چگونه تغییر میکنند
بنابراین معادلهٔ تشکیل میدهیم که ریشه هایش عکس ریشه های معادله (۱) باشند
فرض میکنیم y عکس ریشه x از معادلهٔ (۱) باشد یعنی $y = \frac{1}{x}$ پس $x = \frac{1}{y}$
و چون x در معادله (۱) صدق میکند پس y نیز در معادله مطلوب ذیل
صدق خواهد نمود $a\frac{1}{y^2} + b\frac{1}{y} + c = 0$ یا $a + by + cy^2 = 0$ (۲) پس ریشه های این
معادله (۱) باشند و حال اگر a میل کند بسمت صفر معادلهٔ (۲) بانصورت
درآید $cy^2 + by = 0$ و دو ریشه این معادله چنین میشود $y' = 0$
$y'' = \frac{-b}{c}$ و بنابر فرض ریشه های معادله (۱) عکس y' و y'' میگردد

و بنابراین وقتیکه a میل کند بسمت صفر یکی از ریشه های معادله (۱) عکس
صفر میشود یعنی الی غیرالنهایه میگردد $x' = \frac{1}{0} = \infty$ و دیگری عکس $\frac{-b}{c}$ یعنی
$x'' = \frac{-c}{b}$ پس از اینجا معلوم شد که هرگاه در معادله درجهٔ دوم (۱) ضریب
a اتفاقاً صفر گردد یکی از ریشه های این معادله بی نهایت متزاید میگردد
و معدوم میشود و دیگری میرسد بمقدار معیّن $\frac{-c}{b}$

۳۱۵ — ممکن است اتّفاق افتد که ضریب a و b هر دو یکمرتبه میل
کنند بسمت صفر در اینحالت معادله (۲) منجر شود باین صورت $cy^2 = 0$
و آنوقت دو ریشه این معادله صفر میشود و بنابراین دو ریشه معادلهٔ (۱)
الی غیرالنهایه میگردد

۳۱۶ — تحقیق ریشه های معادله (۱) وقتیکه a میل کند بسمت صفر از روی
فورمول ذیل نیز بسیار سهل است $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
یا $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
ابتدا فرض میکنیم b مثبت باشد پس وقتیکه a میل کند بسمت صفر رادیکال
$\sqrt{b^2 - 4ac}$ منجر شود به $\sqrt{b^2} = |b| = b$ و آنوقت صورت x''
میل کند به $-2b$ و مخرجش میرسد بصفر و بصورت $\frac{-2b}{0}$ نموده شود پس مقدا

مطلق x'' از هر حدی تجاوز کند و الی غیر النهایه میگردد و اما صورت و مخرج x' بازاء $a=0$ میرسند بصفر و مقدار x' بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ نموده میشود و لکن رفع ابهام بسیار سهل است زیرا که صورت و مخرج x' را در مقدار $(-b-\sqrt{b^2-4ac})$ که مزدوج صورت باشد ضرب میکنیم و چنین حاصل میشود

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

و چون از صورت و مخرج کسر عامل مشترک $2a$ را که در ضمن رسیدن بصفر سبب ابهام کسر میگردد حذف کنیم چنین میشود $x'=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$ در حال اگر a میل کند بسمت صفر مخرج این کسر میل میکند به $-2b$ و مقدار واقعی x' در حد چنین میشود $x'=\frac{-2c}{2b}=-\frac{c}{b}$ و اگر فرض کنیم b منفی باشد رادیکال $\sqrt{b^2-4ac}$ منجر شود به $\sqrt{b^2}=|b|=-b$ و چون a میل کند بسمت صفر در این حالت ریشهٔ x' الی غیر النهایه میگردد و ریشهٔ x'' بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید و پس از رفع ابهام چنین میشود $x''=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$ و بعد بازاء $a=0$ مقدار واقعی x'' چنین میشود $x''=\frac{-c}{b}$

۲۱۷ — هرگاه اتفاقاً a و b هر دو یک مرتبه صفر باشند مقدار x' و x'' از روی فورمولهای $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ هر دو بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ نموده شوند و پس از رفع ابهام بطریق سابق و حذف عامل مشترک $2a$ از دو جملهٔ کسر دو ریشه باین صورت درآید

$$x'=\frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

و $x''=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$ در حال اگر a و b میل کنند بسمت صفر و c مخالف صفر باشد دو مقدار x' و x'' در حد الی غیر النهایه میگردد و معدوم میشوند

۲۱۸ — محاسبهٔ ریشه ها در حالیکه ضریب a کوچک باشد.

— وقتیکه ضریب a خیلی کوچک باشد یکی از ریشه ها بحسب مقدار مطلق بی نهایت بزرگ و دیگری نزدیک شود به $\frac{-c}{b}$ ولیکن از روی فورمولهای کلی $x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ مقادیر تقریبی ریشه ها خیلی بزحمت بدست میآید چونکه غالباً b^2-4ac مجذور کامل نیست در این صورت باید مقدار $\sqrt{b^2-4ac}$ را بتقریب استخراج نمود و آنوقت خطائیکه در محاسبهٔ تقریبی رادیکال حاصل شده چون بر $2a$ قسمت شود بی نهایت زیاد میگردد مثلاً اگر چنانچه a مساوی $\frac{1}{1000}$ باشد وقتیکه مقدار تقریبی $\sqrt{b^2-4ac}$ را

بر $2a$ قسمت کنیم خطائیکه از $\sqrt{b^2-4ac}$ حاصل شده در مقدار x
پانصد مرتبه بزرگ میشود پس برای اینکه مقدار x را تا بر عده اعشار
معینی که خواسته باشیم مثلاً تا $\frac{1}{10^n}$ تقریب استخراج کنیم باید ابتدا
مقدار $\sqrt{b^2-4ac}$ را تا کمتر از $\frac{1}{500}\times\frac{1}{10^n}$ تقریب حساب نمود
و هر قدر که a کوچکتر باشد خطا زیادتر میشود و ما در ذیل مقدار یکی
از ریشه ها را بتقریب مشخصی باعانت قاعده معروف بقاعده تقریبات
متوالیه بسرعت حساب میکنیم و چون یکی از ریشه ها بدست آید آن را
از مجموع دو ریشه یعنی از $\frac{-b}{a}$ نقصان میکنیم تا ریشه دیگر نیز معلوم
گردد و a را نسبت به b خیلی کوچک فرض میکنیم و ابتدا مقدار
تقریبی ریشه کوچکتر را بدست میآوریم

قاعده تقریبات متوالیه — اصل قاعده تقریبات
متوالیه از این قرار است معادله کلی $ax^2+bx+c=0$ را
باین صورت مینویسیم $x=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x^2$ (۱) و چون بفرض
a یا $\frac{a}{b}$ بقدر کفایت کوچک است پس مقدار جمله $-\frac{a}{b}x^2$
خیلی کوچک میشود و در تقریب اول میتوان از این جمله صرف نظر نمود با

برای مقدار $-\frac{c}{b}$ را اول مقدار تقریبی x اختیار میکنیم و چنین مینویسیم
$x_1=-\frac{c}{b}$ و بعد اگر در طرف ثانی معادله (۱) بجای x مقدار
x_1 را قرار دهیم دوم مقدار تقریبی بدست میآید $x_2=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_1^2$
و همچنین باز در طرف ثانی معادله (۱) بجای x مقدار x_2 را قرار
میدهیم تا سوم مقدار تقریبی x حاصل شود $x_3=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_2^2$
و بهذا بهمین طریق میتوان این عمل را چندین مرتبه تکرار نمود و بطور کلی
n اُم مقدار تقریبی x را بدست آورد $x_n=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_{n-1}^2$
این بود اصل قاعده تقریبات متوالیه و حال می پردازیم بتفصیل
محاسبه مقادیر تقریبی ریشه مطلوب از این قرار اول مقدار تقریبی
x اینست $x_1=\frac{-c}{b}$ و دوم مقدار تقریبی آن چنین میشود
$x_2=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$ و بعد سوم مقدار تقریبی آن را حساب میکنیم
حاصل میشود $x_3=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}x_2^2=-\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}\right)^2=$
$=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}-\frac{2a^2c^3}{b^5}-\frac{a^3c^4}{b^7}$ و چون نسبت جمله آخر بجمله ما قبلش مساوی است با
$\frac{ac}{2b^2}$ و این عددیست خیلی کوچک اگر چنانچه a خیلی کوچک باشد
پس میتوان در محاسبه سوم مقدار تقریبی از جمله آخر قطع نظر نموده و چنین

نوشت $x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}$

و حال چون این مقدار را در طرف ثانی معادله (۱) قرار دهیم چهارم

مقدار تقریبی بدست میآید $x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}\right)^2$

و چون اعمال لازمه را بجا آوریم و از جمیع جملهٔ که شامل قوای مافوق

قوه سوم a باشند صرف نظر کنیم چهارم مقدار تقریبی چنین میشود

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7}$$

و چون بهمین طریق عمل کنیم متدرجاً چنین بدست میآید

$$x_5 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7} - 14\frac{a^4c^5}{b^9}$$

$$x_6 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7} - 14\frac{a^4c^5}{b^9} - 42\frac{a^5c^6}{b^{11}}$$

و هکذا چون این مقادیر x_1 و x_2 و x_3 ...... را ملاحظه کنیم می‌بینیم

که مقادیر صعودی هستند که متدرجاً نزدیک شوند بریشه مطلوب x'

و هر کدام از آنها مساویست با مقدار ما قبلش بانضمام یک جمله تصحیح و

مقادیر این جمل تصحیح که ما فرا میگیریم متدرجاً کوچکتر میشوند چونکه شامل عوامل

قوای صعودی a میباشند و چون عده جمل تصحیح را بقدر کفایت اختیار

کنیم مقدار ریشه مطلوب تا هر تقریبی که خواسته باشیم بدست میآید و علاوه بر این

هرگاه در مقدار x_n توقف کنیم خطائیکه از اختیار x_n بجای x' حاصل شده

به ε_n بنمائیم ثابت میکنیم که $\varepsilon_n < \frac{c}{b} \times \left(\frac{4ac}{b^2}\right)^n$ و چون دو ریشه معادله

حقیقی هستند پس $\frac{4ac}{b^2}$ کوچکتر میشود از واحد و بنابراین میتوان n را

آنقدر بزرگ اختیار نمود تا خطای ε_n کوچکتر باشد از هر مقداری که بخواهیم

و قاعده تقریبات متوالیه قابل اجرا نیست مگر وقتیکه $\frac{4ac}{b^2}$ کوچکتر از واحد

باشد یعنی ریشه های معادله حقیقی باشند و اما هر قدر مقدار $\frac{4ac}{b^2}$

از واحد خیلی کوچکتر باشد مقادیر تقریبی x_1 و x_2 و x_3 و .... بسرعت

نزدیک شوند بمقدار مطلوب x'

مثال ۱ــ ریشه های معادله ذیل را تا ده رقم اعشار حساب کنید

$$0.0000048x^2 - 19x + 1 = 0$$

چون $a = 0.0000048$ و $b = -19$ و $c = 1$

پس $-\frac{a}{b} = \frac{0.0000048}{19} < 0.0000003$ و $-\frac{c}{b} = \frac{1}{19}$

و از اینجا چنین نتیجه میشود $-\frac{ac^2}{b^3} = -\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b}\right)^2 < 0.0000003 \times \frac{1}{361} < \frac{1}{10^9}$

$$-\frac{2a^2c^3}{b^5} = -2\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^3 < 0.000000000000018 \times \frac{1}{6859} < \frac{1}{10^{14}}$$

و از جمله سوم تصحیح و همچنین از جمل مابعد شش میتوان صرف نظر نمود و کافیست که

مجموع $-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$ را تا ده رقم اعشار صحیح حساب کرد

$$-\frac{c}{b}=\frac{1}{19}=0{,}05263157895$$

$$-\frac{ac^2}{b^3}=\frac{0{,}0000048}{19^3}=0{,}00000000700$$

پس $x'=0{,}0526315859$ تا $\frac{1}{10^{10}}$ تقریب

$$x''=-\frac{b}{a}-x'=39583333333333-$$

تا ده رقم اعشار $-0{,}0526315859=395833{,}2807017474$

مثال ۲ــ حل کنید این معادله را $3x^2-7640x+400=0$ چون $\frac{4ac}{b^2}=\frac{4800}{58369600}$ کمتر است از $\frac{1}{10^4}$ پس قاعده تقریبات متوالیه قابل اجرا است و چون بطریق مثال فوق حل و بحث کنیم مقدار x' تا کمتر از $\frac{1}{10^9}$ تقریب نقصانی استخراج میشود $x'=0{,}05235097$ و بعد $x''=2546{,}614309569$

مثال ۳ــ حل کنید این معادله را $5x^2+140x-7=0$

دو ریشه تا کمتر از نیم واحد تقریباً از مرتبه ششم اعشار چنین میشود

$x'=0{,}049911$ و $x''=-28{,}049911$

امثله متعلقه بفصل سیزدهم

۱ــ حل کنید معادلات ناقصه ذیل را

$-5x^2+140x=0$ و $7x^2-4375=0$

$$3(x-3)(x-4)+21(x-1)-7=155$$

$$(x-7)(x-15)(x-2)=(x-1)(x+21)(x+10)$$

معادلات ذیل بصورت معادلات ناقصه درآورده حل کنید

$$a^2x^2+2abx+b^2-c=0$$

$$(a^2-kc^2)x^2+2(ab-kcd)x+b^2-kd^2=0$$

$$p^2x^2+(2q+b)px+q(q+b)=0$$

۲ــ معادلات ذیل را حل کنید

$x^2-15x+56=0$ و $12x^2+17x+6=0$

$15x^2-19x-10=0$ و $x^2-16x+63=0$

$4x^2-3x+7=x^2-2x+1$ و $(x-1)(x-2)=6$

$(5x-3)^2-7=44x+5$ و $x^2-879x+185137=0$

$$(x-2)(x-3)+(x-3)(x-4)=(x-4)(x-5)$$

$$x^2(x-1)(x-2)+x^2(x+1)(x+2)-2(x^4+x^2+x+1)=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{x}{2}+(x-1)(x-2)=3(x+1)(x+2)-35$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=2x-\frac{5}{6}$$

$$x-1+(x-2)(x-3)=6x(x+1)-70$$

$$(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$$

$$(ax-b)(bx-a)=c^2,\quad (x-a)^2(x-b)=x^3-a^3$$

$$(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(3b^2+a^2)(x^2+x+1)$$

$$(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$$

$$3x^2-x-\sqrt{2}=0,\quad 3x^2-(3\sqrt{3}+2)x+2\sqrt{3}=0$$

$$x^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}=0,\quad 4x^2-2R(\sqrt{5}+1)x+R^2\sqrt{5}=0$$

۳ــ علامات و ضرب ریشه‌های معادلات ذیل را بدون حل آنها بنظر تعیین کنید

$$7x^2-16x+9=0,\quad 7x^2+16x-9=0$$

$$7x^2+16x+9=0,\quad 7x^2-16x-9=0$$

$$5x^2-12x+8=0,\quad 5x^2+12x-8=0$$

$$x^2-100x+6=0,\quad 2x-3x+1=0$$

$$(x-1)(x-3)+(x+1)(x+2)=6$$

۴ــ معادلات کسری ذیل را حل کنید

$$\frac{x}{15}+\frac{40}{3(10-x)}=\frac{3(10+x)}{95},\quad \frac{x-6}{x-12}=\frac{x-12}{x-6}+\frac{5}{6}$$

$$\frac{x+7}{x^2-7x}-\frac{x-7}{x^2+7x}=\frac{7}{x^2-7^2},\quad \frac{7x+10}{x-2}=\frac{5x}{12}+\frac{35}{6}$$

$$\frac{1}{3x^2-27}+\frac{3}{4}-\frac{1}{x-3}=1,\quad x-\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}=2$$

$$\frac{3}{4x^2-4}+\frac{2}{3}=\frac{6}{x^2-1}-\frac{4}{7},\quad \frac{2x+3}{x+4}=\frac{2x+4}{5x-3}$$

$$\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0,\quad \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{3}{x}+\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=4\frac{1}{12},\quad \frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}+2=0$$

$$\frac{3x-4}{x+1}=x^2+2x-\frac{7}{x+1},\quad \frac{x+2}{x-4}+\frac{x+3}{x-2}+5=0$$

$$\frac{x-3}{x+4}+\frac{x+5}{x-5}+\frac{x-1}{x+1}=3,\quad \frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{3x+2}{2x-1}+\frac{7-x}{2x+1}=\frac{7x-1}{4x^2-1}+5,\quad \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}=\frac{x-2}{x-3}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{x-1}+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3}{2}\quad \frac{x^2+2}{3x-2}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{x}+\frac{x}{b},\quad \frac{x-a}{b}-1=\frac{b+x}{x}$$

$$\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x},\quad x+\frac{1}{x}=a$$

$$a+b+x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0,\quad \frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$$

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{b+x}{b-x}-\frac{b-x}{b+x}$$

$$\frac{x}{(x-a)(x-b)}+\frac{a}{(a-b)(a-x)}+\frac{b}{(b-x)(b-a)}=0$$

$$\frac{(a-x)^3+(x-b)^3}{(a-x)^2+(x-b)^2}=a-b,$$

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$$

$$\frac{x-b}{x-a}+\frac{x-a}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

$$\frac{a-b+x}{a+b+x}+\frac{a+b}{x+b}=2$$

$$\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=2\frac{a+b+c}{x+b+c}$$

$$\frac{3x-2b}{x-b}-\frac{4x+2b}{x+a}=\frac{a-b}{a+b}$$

۵ — معادلاتی تشکیل دهید که ریشه‌های ذیل باشند

$-1,\ \frac{2}{7}$ $\quad$ $\frac{-2}{3},\ -\frac{3}{4}$ $\quad$ $\sqrt{3},\ \sqrt{2}$ $\quad$ $1,\ \frac{2}{7}$

$-\sqrt{2},\ \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\frac{R}{2},\ \frac{R\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $3+2\sqrt{5},\ 3-2\sqrt{5}$

$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1),\ \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$ $\quad$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $-5,\ 4$

$1+i,\ 1-i$ $\quad$ $2+3i,\ 2-3i$ $\quad$ $\frac{a-b}{a^2-b^2},\ \frac{a+b}{a^2-b^2}$

۶ — در جنس و علامات ریشه‌های معادلات ذیل بحسب مقدار λ بحث کنید

$$x^2-2(\lambda+1)x+\lambda^2=0,\quad x^2-(5\lambda+2)x+1=0$$

$$x^2-2x+\lambda-4=0,\quad \lambda x^2-3x+5=0$$

$$x^2-6x+\lambda-3=0,\quad \lambda x^2-2x+4\lambda=0$$

$$(\lambda+1)x^2-4(\lambda-2)x+4\lambda-5=0$$

$$2\lambda x^2-(4\lambda+3)x+2\lambda-5=0$$

$$(\lambda-1)x^2-(2\lambda-1)x+(\lambda-4)=0$$

۷ — معلوم کنید بازاء چه مقداری از λ معادلات ذیل دارای ریشه‌های مختلفه یا متساویه بود

$$x^2-8x+\lambda=0,\quad \lambda x^2+2(\lambda+1)x+\lambda+3=0$$

$$(a-b)^2x^2+2(a^2-b^2)x+\lambda=0$$

۸ — معادلهٔ ذیل را حل کنید و معلوم نمائید بازاء چه مقداری از m دو ریشه بنسبت ۲ و ۵ خواهند بود

$$mx^2+5x^2-2mx-x=3-m$$

۹ — در معادلهٔ $2(2m-1)x^2-4mx+m+2=0$ مقدار m را چنان معین کنید که دو ریشهٔ x' و x'' معادلهٔ مفروضه در رابطهٔ ذیل صدق کنند $3x'x''+x'-2x''=0$

۱۰ — فرض میکنیم x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند معادله تشکیل دهید که دو ریشهٔ آن $\frac{x'}{x''}$ و $\frac{x''}{x'}$ باشند یا $x'+x''$ و $x''x'$ ویا $\frac{x'^2+x''}{x''}$ و $\frac{x''^2+x'}{x''}$

۱۱– ثابت کنید که مقدار λ هرچه باشد مجموع دو ریشه معادله ذیل همواره مساوی ۳ است

$$x^2 - 3x + \lambda = 0$$

۱۲– ریشه های این معادله را در ۳ ضرب کنید $2x^2 + x - 1 = 0$

۱۳– ریشه های این معادله را بر ۳ قسمت کنید $x^2 - 3x - 3 = 0$

۱۴– ثابت کنید که اگر $b^2 - 4ac$ منفی باشد ریشه های معادله ذیل حقیقی میگردد

$$(b^2 - 4ac)x^2 + 2(2ac' + 2ca' - bb')x + (b'^2 - 4a'c') = 0$$

۱۵– ریشه های دو معادله ذیل را بقاعده تقریبات متوالیه استخراج کنید تا $\frac{1}{10}$ تقرب

$$4x^2 - 625x - 8 = 0 \quad \text{و} \quad 3x^2 + 254x + 5 = 0$$

۱۶– معلوم کنید بازاء چه مقداری از λ مجموع مجذورات ریشه های معادله ذیل مساوی m^2 خواهند بود $x^2 - \lambda x + 2\lambda + 4 = 0$

۱۷– عدد ۱۹۰ در چه دستگاهی از شماره به ۲۷۶ نوشته میشود

۱۸– عدد ۳ را بر دو جزء چنان قسمت کنید که مجموع مجذورات دو جزء $\frac{53}{9}$ شود

۱۹– مقدار α را چنان معین کنید که یکی از ریشه های معادله $x^2 - \frac{5}{2}x + \alpha^3 = 0$ مجذور ریشه دیگر باشد

۲۰– ما بین ریشه های دو معادله ذیل رابطه بدست آورید

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{و} \quad x^2 - 2x\sqrt{p^2 - 2q} + p^2 - 2q = 0$$

۲۱– عبارات ذیل را حساب کنید در صورتیکه x' و x'' ریشه های این معادله $x^2 + px + q = 0$ باشند

$$x'^3 + x''^3 + 3x'^2 + 3x''^2$$

$$x'^5 + 4x'^3x''^2 + 5x'x''^2 + 4x'^2x''^3 + 5x'^2x'' + x''^5 \quad \text{و}$$

$$3 + \frac{5}{x'^2 + x''^2} + \frac{3}{x''^2} + \frac{3}{x'^2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{x'^2} + \frac{2}{x'} + \frac{1}{x''^2} + \frac{2}{x''}$$

۲۲– مقدار λ را چنان تعیین کنید که عبارت ذیل مجذور کامل شود

$$x^2 - 4bx + 4ab + \lambda^2 - 2\lambda x$$

۲۳– مقدار a و b را چنان معین کنید که دو معادله ذیل دارای ریشه های مشترک باشند

$$(a+1)x^2 + 2(2b+1)x - 45 = 0$$

$$2(3 - 2b)x^2 + (a+2)x - 30 = 0$$

۲۴– مقدار m را چنان قرار دهید که تفاضل دو ریشه معادله ذیل مساوی ۲ باشد

$$5x^2 + 12x + m = 0$$

۲۵– مقدار λ را در معادله $x^2 - 2x + \lambda = 0$ چنان تعیین کنید که ریشه های آن در یکی از این روابط ذیل صادق آید

$$x'^2 + x''^2 = 3$$

$$x'^2 - x''^2 = 1 \quad \text{و} \quad x'x'' + x' + x'' = 5 \quad \text{و}$$

۲۶ـ در معادله $x^2+px+q=0$ ما بین p و q رابطه بدست آورید چنانکه اولاً یک ریشه سه برابر ریشه دیگر باشد ثانیاً مساوی آن

۲۷ـ مقدار m را چنان قرار دهید که ریشه های معادله ذیل مساوی گردند

$$3x^2-5x+m=0$$

۲۸ـ معادله تشکیل دهید که ریشه هایش مساوی ریشه های معادله $x^2+px+q=0$ باشند بانضمام مقدار h و بعد مقدار h را چنان اختیار کنید که جمله معلوم یا جمله درجه اول معادله مطلوب مفقود باشد شرط حالا آنرا بیان کنید

۲۹ـ فرض میکنیم α و β و γ سه مقدار معلوم باشند و x' و x'' ریشه های معادله $x^2+px+q=0$ معلوم کنید شرایط ضرایب p و q را بطوریکه تساوی ذیل حاصل شود

$$\alpha x'^2+\beta x'+\gamma=\alpha x''^2+\beta x''+\gamma$$

۳۰ـ فرض میکنیم x' و x'' ریشه های معادله درجه دوم $x^2+px+q=0$ باشند میخواهیم مقدار P و Q را بحسب p و q معلوم کنیم چنانکه یک معادله $X^2+PX+Q=0$ تشکیل شود که ریشه های آن در این دو رابطه صدق کنند $X'=\frac{x'}{x'-1}$ و $X''=\frac{x''}{x''-1}$

فصل چهاردهم

خواص ترینم درجه دوم

۱ـ تجزیه ترینم درجه دوم بعوامل درجه اول

۳۱۹ـ ترینم درجه دوم عبارتست از اکسپرسیون سه جمله ax^2+bx+c در صورتیکه ضرایب a و b و c مقادیر ثابت و معلومه باشند و x نمایش مقدار متغیری که بتواند جمیع مقادیر ممکنه از $-\infty$ تا $+\infty$ را اختیار نماید و ما در این فصل میپردازیم بمعرفت خواص ترینم درجه دوم و محض اختصار بیان هر عددیکه بجای متغیر x قرار دهیم مقدار ترینم را صفر کند ریشه ترینم نامیم و اغلب بجای ریشه نیز صفر ترینم گویند و بطور کلی اصفار هر کثیرالجمله یا معرف عبارتست از ریشه های معادله که حاصل شود در صورتیکه کثیرالجمله یا معرف مفروض را مساوی صفر فرض کنیم

۳۲۰ـ قضیه ـ ترینم درجه دوم ax^2+bx+c را میتوان تبدیل کرد بحاصل ضرب a که مخالف صفر باشد در تفاضل دو مربع یا در یک مربع و یا در مجموع دو مربع در صورتیکه دیگر بیان

b^2-4ac مثبت یا صفر و یا منفی باشد

برهان — ترینم درجه دوّم را میتوان همواره بصورت کلی ذیل درآورد

$$ax^2+bx+c \equiv a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] \equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

اولاً فرض میکنیم $b^2-4ac>0$ پس $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ را میتوان مجذور $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ تصور نمود و بنابراین ترینم مفروض متحد گردد با حاصل ضرب a در تفاضل دو مربع از این قرار

$$ax^2+bx+c\equiv a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

ولیکن چون تفاضل دو مجذور $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ و $\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$ دو مقدار $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ و $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ را تبدیل کنیم بحاصل ضرب مجموع اند مقدار در تفاضل آنها ترینم تجزیه شود بحاصل ضرب دو عامل درجه اول

$$ax^2+bx+c\equiv a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$$

و علاوه براین چون ملاحظه کنیم (نمره ۲۰۳)

$$-x'=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad -x''=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

چنین حاصل میشود $ax^2+bx+c\equiv a(x-x')(x-x'')$

ثانیاً فرض میکنیم $b^2-4ac=0$ در اینحالت ترینم بصورت حاصل ضرب

a در یک تربیع درآید

$$ax^2+bx+c\equiv a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2$$

ثالثاً فرض میکنیم $b^2-4ac<0$ پس $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ یا $+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ را میتوان مجذور $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ تصور نمود و در این حالت ترینم مفروض مبدل گردد بحاصل ضرب a در مجموع دو مربع از این قرار

$$ax^2+bx+c\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]$$

۲۲۱ — **تنبیه ۱** — از روی این خواص مذکوره در ترینم میتوان ریشه های معادله درجه دوّم $ax^2+bx+c=0$ یعنی معادله که از مساوی صفر کردن ترینم مفروض حاصل شود بطریق ذیل استخراج نمود از این قرار اگر b^2-4ac مثبت باشد طرف اوّل این معادله را میتوان بصورت حاصل ضرب دو عامل درجه اوّل درآورد

$$a\left[x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0$$

و چون a مخالف صفر است پس شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب دو عامل صفر باشد کافیست که یکی از اندو عامل صفر گردد یعنی $x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$ یا $x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$

و چون دو ریشه مختلفه معادله مفروضه را x' و x'' فرض کنیم

چنین نتیجه میشود $x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

پس ترینم بصورت ذیل نیز نوشته میشود

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')(x-x'')$$

و از اینجا ظاهر است که ترینم بازاء هر مقدار دیگر از x غیر x' و x'' مخالف صفر خواهد بود و حال اگر فرض کنیم $b^2-4ac=0$ معادله مفروضه باین صورت درآید $a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2=0$ و واضح است که این معادله فقط بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ صفر میگردد پس فقط یک ریشه قبول میکند ولیکن در اینحالت گویند معادله دارای دو ریشه متساوی با یک ریشه مضاعف است زیرا که چون مقادیر a و b و c را تغییر دهیم بقسمیکه b^2-4ac مقادیر مثبته اختیار کند معادله دارای دو ریشه خواهد بود یکی کوچکتر و دیگری بزرگتر از $-\frac{b}{2a}$ و وقتیکه b^2-4ac میل کند و رسد به صفر این دو ریشه نیز متماماً میرسند به $-\frac{b}{2a}$ پس اگر ریشه مضاعف را x' فرض کنیم چنین حاصل میشود

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')^2$$

بالاخره وقتیکه b^2-4ac منفی باشد طرف اول معادله باین

صورت درآید $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

و در این حالت ترینم بازاء هیچ مقدار مثبت یا منفی که بجای x قرار دهیم صفر نخواهد بود چونکه مقدار متغیر $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ غیر از مثبت یا صفر نتواند باشد و مقدار ثابت $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ نیز همواره مثبت است و بنابراین هیچ مقدار مثبت یا منفی از x در معادله صدق نکند

تجزیه ترینم درجه دوم بحاصل ضرب دو عامل درجه اول همواره ممکن است و اما وقتیکه (b^2-4ac) منفی باشد ریشه‌های ترینم موهومی میگردد (نمره ۳۰۵) و عوامل درجهٔ اول دارای ضرایب موهومی خواهند بود در اینحالت ترینم تجزیه شود بحاصل ضرب دو عامل موهومی از درجه اول و متعاقد موهومی بدست آیند که چون بجای x قرار دهیم ترینم را صفر کنند

۳۲۲ — **تنبیه ۲** — از روی تجزیه ترینم درجهٔ دوم بعوامل درجه اول وقتیکه (b^2-4ac) بزرگتر یا مساوی صفر باشد میتوان روابط مابین ضرایب و ریشه‌ها را باین طریق بدست آورد و چون دو ریشه حقیقی مختلفه یا متساوی را به x' و x'' بنامیم در هر دو حالت چنین خواهیم داشت (...)

$$ax^2+bx+c \equiv a(x-x')(x-x'')$$

و بعد

$$ax^2+bx+c \equiv ax^2-a(x'+x'')x+ax'x''$$

و چون دو کثیر الجمله طرفین متعادل و متحد هستند پس لازم میآید که ضرایب متعلق بیک قوه از x باشند متساوی گردند یعنی $b = -a(x'+x'')$ و $c = a x' x''$ یا $x'+x'' = -\frac{b}{a}$ و $x'x'' = \frac{c}{a}$

۳۲۳ - و بالعکس از روی روابط ما بین ضرایب و ریشه ها نیز میتوان ترینم را بعوامل درجه اول تجزیه نمود از این قرار چون $x'+x'' = -\frac{b}{a}$ و $x''x' = \frac{c}{a}$ پس چنین حاصل میشود $ax^2+bx+c \equiv$

$$\equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \equiv a\left[x^2-(x'+x'')x+x'x''\right]$$

و پس از اختصار چنین میشود $ax^2+bx+c \equiv a(x-x')(x-x'')$

مثال ۱ - ترینم $3x^2-5x-8$ را بعوامل درجه اول تجزیه کنید

چون معادله $3x^2-5x-8=0$ را حل کنیم این دو ریشه بدست میآید $x'=-1$ و $x''=\frac{8}{3}$ پس

$$3x^2-5x-8 = 3(x+1)\left(x-\frac{8}{3}\right) = (x+1)(3x-8)$$

مثال ۲ - ترینم $49x^2-70x+25$ را بعوامل درجه اول تجزیه کنید - معادله $49x^2-70x+25=0$ دارای دو ریشه متساوی با $x'=\frac{5}{7}$ پس

$$49x^2-70x+25 = 49\left(x-\frac{5}{7}\right)^2 = (7x-5)^2$$

مثال ۳ - ترینم $4x^2-12x+13$ را بعوامل درجه اول تجزیه کنید

ریشه های معادله $4x^2-12x+13=0$ عبارتند از $x=\frac{3\pm2\sqrt{-1}}{2}$

پس $4x^2-12x+13 = 4\left(x-\frac{3-2\sqrt{-1}}{2}\right)\left(x-\frac{3+2\sqrt{-1}}{2}\right) =$

$$= (2x-3+2\sqrt{-1})(2x-3-2\sqrt{-1}) = (2x-3)+4$$

۲ - علامات ترینم درجه دوم بحسب علامات مقادیر مختلفه x

۳۲۴ - هرگاه x تغییر کند یعنی مقادیر حقیقیه ممکنه به x داده شود ترینم ax^2+bx+c میتواند مقادیر مثبته یا منفیه اختیار کند در حقیقت ترینم معرفیست از x و از روی قضیه ذیل بدون هیچ تبدیلی میتوان علامت ترینم را بازاء هر مقدار غیر مشخصی از x معلوم نمود.

قضیه - اولاً وقتیکه ترینم ax^2+bx+c دارای ریشه های حقیقی و مختلف باشد بازاء هر مقدار x واقع در خارج ریشه ها یعنی کوچکتر از ریشه کوچکتر یا بزرگتر از ریشه بزرگتر باشد علامت ترینم مطابق است با علامت ضریب a و بازاء هر مقدار x واقع ما بین ریشه ها علامت ترینم مخالف علامت a است ثانیاً اگر ریشه ها متساوی باشند بازاء هر مقدار x علامت ترینم مطابق علامت a است مگر بازاء مقدار $x=-\frac{b}{2a}$

مقدار ترنیم صفر میشود ثالثاً وقتیکه ریشه ها موهومی باشند هرچه باشد مقدار x علامت ترنیم همواره مطابق است با علامت a

اولاً — فرض میکنیم ریشه های ترنیم حقیقی و مختلف باشند یعنی $b^2-4ac>0$ و ریشه کوچکتر را به x' و بزرگتر را به x'' مینمائیم پس در این حالت ترنیم را باین صورت در آوردیم $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$

چون بازاء هر مقدار x کوچکتر از x' دو عامل $(x-x')$ و $(x-x'')$ منفی هستند پس حاصل ضربشان مثبت میشود و بنابراین علامت ترنیم $a(x-x')(x-x'')$ مطابق علامت a است و بازاء هر مقدار x واقع مابین x' و x'' عامل $(x-x')$ مثبت است و عامل $(x-x'')$ منفی و بنابراین علامت حاصل ضرب $a(x-x')(x-x'')$ یا ترنیم مخالف a خواهد بود و بالاخره بازاء هر مقدار x بزرگتر از x'' دو عامل $(x-x')$ و $(x-x'')$ مثبت شوند و علامت ترنیم مطابق است با a

ثانیاً فرض میکنیم ریشه های ترنیم متساوی باشند یعنی $b^2-4ac=0$ پس چنین خواهیم داشت $ax^2+bx+c\equiv a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

بازاء هر مقدار x غیر از $-\frac{b}{2a}$ مقدار $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ مثبت است

پس ترنیم بعلامت a خواهد بود و بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ ترنیم صفر میشود

ثالثاً — فرض میکنیم بالاخره ترنیم دارای ریشه نباشد یعنی $b^2-4ac<0$ پس در این حالت میتوان ترنیم را باین صورت در آورد

$$ax^2+bx+c\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

چون b^2-4ac منفی است پس $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ مثبت میشود و مقدار $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ نیز مثبت خواهد بود هرچه باشد مقدار x

بنابراین علامت ترنیم همواره مطابق است با علامت a

این قضیه مذکوره را میتوان بطریق مختصر چنین ادا نمود که علامت ترنیم درجه دوم همواره مطابق است با علامت جمله اولش باستثنای وقتیکه مقادیر x واقع گردند مابین ریشه ها زیرا که اگر ریشه ها متساوی یا موهومی باشند نمیتوان مابین ریشه ها هیچ مقداری به x داد

مثال ۱ — ترنیم $6x^2+x-2$ ریشه هایش عبارتند از $-\frac{2}{3}$ و $+\frac{1}{2}$ پس وقتیکه x از $-\infty$ تا $-\frac{2}{3}$ و از $+\frac{1}{2}$ تا $+\infty$ تغییر کند ترنیم مفروض مثبت است و اگر x از $-\frac{2}{3}$ تا $+\frac{1}{2}$ تغییر کند ترنیم مفروض منفی است

مثال ۲- ترنیم $-8x^2+2x+5$ دارای دو ریشه $-\frac{5}{4}$ و $+\frac{3}{2}$ است و چون ضریب x^2 منفی است پس وقتیکه x از $-\infty$ تا $-\frac{5}{4}$ تغییر کند ترنیم منفی است و اگر x مابین $-\frac{5}{4}$ و $+\frac{3}{2}$ تغییر کند ترنیم مثبت است و چون x مابین $+\frac{3}{2}$ و $+\infty$ تغییر کند ترنیم منفی است

مثال ۳- ترنیم $3x^2-10x+9$ دارای ریشه نیست و چون ضریب x^2 مثبت است پس ترنیم بازاء هر مقدار حقیقی x مثبت خواهد شد

۳۲۵ — هرگاه مقدار ترنیم درجه دوم را به $f(x)$ نمائیم یعنی $f(x)=ax^2+bx+c$ خلاصه نتایج قضیه فوق چنین میشود

$b^2-4ac>0$					
x	$-\infty$	x'	$-\frac{b}{2a}$	x''	$+\infty$
$f(x)$	بعلامت $+a$	۰	بعلامت $-a$	۰	بعلامت $+a$

$b^2-4ac=0$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	بعلامت $+a$	۰	بعلامت $+a$

$b^2-4ac<0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	بعلامت a است	

۳۲۶ تنبیه ۱- هرگاه در ترنیم $f(x)=ax^2+bx+c$

نتیجه تبدیل x به α یعنی $f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c$ مخالف علامت ضریب a باشد ریشه های ترنیم حقیقی و مختلف میشوند و عدد α واقع مابین آن دو ریشه زیرا اگر ریشه های ترنیم مساوی یا موهومی بودند بموجب قضیه سابقه لازم میآید که علامت ترنیم بازاء هیچ مقدار حقیقی x مخالف علامت a نباشد بنابراین ریشه های ترنیم حقیقی و متمایزند و علاوه بر این عدد α واقع مابین آن دو ریشه والا لازم میآید که نتیجه تبدیل x به α مطابق علامت a باشد و این خلاف فرض است

مثال ۱- در معادله $ax^2+bx+c=0$ چون x را به صفر تبدیل کنیم حاصل میشود c و حال اگر c بعلامت مخالف a باشد ریشه های معادله حقیقی و مختلف میگردد

مثال ۲- در معادله $(x-a)(x-b)-c^2=0$ ضریب x^2 واحد است پس اگر x را به a یا b تبدیل کنیم حاصل میشود $-c^2$ بنابراین معادله دارای دو ریشه حقیقی است و اگر c صفر باشد ریشه های معادله عبارتند از a و b

مثال ۳- در معادله $(x-a)(x-b)+(x-a)+(x-b)=0$ ضریب x^2 واحد است و اگر فرض کنیم $b<a$ و x را تبدیل کنیم به b حاصل میشود مقدار منفی $b-a$ پس معادله دارای دو ریشه حقیقی است و اگر $b=a$ معادله باین صورت درآید $(x-a)(x-a+2)=0$ و دو ریشه چنین میشوند a و $a-2$

۳۲۷ — نتیجهٔ ۲ — هرگاه در ترنیم $f(x)=ax^2+bx+c$ بجای x متدرجاً دو عدد α و β قرار دهیم و $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ بعلامت مخالف یکدیگر باشند ترنیم دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز خواهد بود و یکی از آندو ریشه واقع است ما بین α و β زیرا که فرض میکنیم علامت ترنیم بازاء $x=\alpha$ مخالف علامت a باشد و بازاء $x=\beta$ مطابق آن پس بمقتضای نتیجهٔ (۱) دو ریشهٔ ترنیم حقیقی و مختلف میگردند و علاوه بر این عدد α واقع باشد ما بین این دو ریشه یعنی $x'<\alpha<x''$ در صورتیکه $x'<x''$ مثال هرگاه در معادله $5x^2-60x+43=0$ بجای x متدرجاً ۱ و $\frac{1}{4}$ قرار دهیم دو مقدار مختلف العلامه ۱۲- و $\frac{57}{4}$ بدست میاید پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است و یکی از آنها واقع است ما بین ۱ و $\frac{1}{4}$

۳۲۸ — مکان عدد α را نسبت بریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم بدون حل آن معادله معلوم کنید $f(x)=ax^2+bx+c=0$ ابتدا مقدار $f(\alpha)$ را حساب میکنیم اگر علامت این مقدار مخالف a باشد معلوم میشود که معادلهٔ مفروضه دارای دو ریشهٔ حقیقی است (نمره ۳۲۶) و عدد α واقع است ما بین آندو ریشه و امّا اگر مقدار $f(\alpha)$ مطابق علامت a باشد نمیتوان تعیین کرد که معادله ریشه داشته باشد پس در این حالت باید b^2-4ac را تشکیل داد اوّلاً

فرض میکنیم $b^2-4ac<0$ معلوم میشود که معادلهٔ مفروضه ریشه ندارد ثانیاً اگر $b^2-4ac=0$ معادله فقط دارای یک ریشهٔ $-\frac{b}{2a}$ است که میتوان آنرا مستقیماً به α سنجید ثالثاً هرگاه $b^2-4ac>0$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است و α واقع است در خارج ریشه‌ها و حال برای دانستن اینکه α بزرگتر یا کوچکتر است از آندو ریشه چون عدد α باید یا بزرگتر یا کوچکتر باشد از هر دو ریشه و از هر عددیکه ما بین آندو ریشه باشد کافی است که α را با یک عددی ما بین آندو ریشه بسنجید و اگر پیش از وقت عددی ما بین دو ریشه معلوم نباشد کافی است که α را به $-\frac{b}{2a}$ یعنی نصف مجموع دو ریشه که واقعست ما بین آندو ریشه بسنجید زیرا که از نامساوی $x'<x''$ چنین حاصل میشود $2x'<x'+x''<2x''$ یا $x'<\frac{x'+x''}{2}<x''$

۳۲۹ — ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را نسبت بدو عدد α و β ترتیب دهید بدون حل آن معادله $f(x)=ax^2+bx+c=0$

ممکن است قاعدهٔ مذکوره در نمرهٔ فوق را در هر کدام از این دو عدد جاری کرد و لیکن اگر $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ را تشکیل دهیم عمل خیلی مختصر میشود

اوّلاً هرگاه $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی است نمره (۳۲۷) و یکی از آندو عدد α و β واقع باشد ما بین آندو ریشه و اگر فرض کنیم $f(\alpha)$

علامت $f(\gamma)$ باشد γ واقع شود در خارج ریشه‌ها و این ترتیب ذیل نتیجه میشود

در صورتیکه فرض کنیم $\beta > \alpha$

$$\alpha \quad x' \quad \beta \quad x''$$

ثانیاً هرگاه $f(\alpha).f(\beta) > 0$ ولیکن علامت $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ مخالف a باشد پس معلوم میشود که معادله دارای دو ریشه حقیقی است (نمره ۳۲۶) و دو عدد α و β واقعند مابین آن دو ریشه و این ترتیب ذیل حاصل میشود

$$x' \quad \alpha \quad \beta \quad x''$$

ثالثاً فرض میکنیم علامت $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ مطابق a باشد در این حالت نمیتوان فهمید که معادله دارای ریشه هست یا نه پس باید دیسکریمینان $b^2 - 4ac$ را تشکیل داد و هرگاه مقدار دیسکریمینان منفی باشد معادله ریشه ندارد و اگر این مقدار صفر باشد معادله فقط دارای یک ریشه است که میتوان آن را بلاواسطه با دو عدد α و β سنجید و بالاخره هرگاه $b^2 - 4ac$ مثبت باشد معادله دارای دو ریشه حقیقی است و دو عدد α و β واقعند در خارج از دو ریشه و علاوه بر این میدانیم که این دو ریشه با $-\frac{b}{2a}$ نسبت به عدد α و β یک ترتیب قرار خواهند گرفت و بنابراین ترتیب $-\frac{b}{2a}$ را نسبت به α و β معین میکنیم و آنوقت هر دو ریشه مرتبه واقع میگردند در یکی از این سه فاصله ذیل که شامل $-\frac{b}{2a}$ باشد

$$-\infty \quad \alpha \quad \beta \quad +\infty$$

مثال ۱ - هرگاه در ترینم $f(x) = 325x^2 - 783x + 287$ فرض کنیم $x=1$ مقدار منفی $f(1) = -171$ حاصل میشود پس بدون محاسبه دیسکریمینان چنین استنباط میکنیم که ریشه‌های ترینم حقیقی اند و عدد (۱) واقع است مابین آن دو ریشه و چون در همین ترینم متدرجاً فرض کنیم $x = 0$ و $x = 2$ یعنی $f(0) = 287$ و $f(2) = 21$ را تشکیل دهیم دو نتیجه مثبت بدست میاید پس معلوم میشود که یکی از دو ریشه‌ها واقع است مابین ۰ و ۱ و دیگری مابین ۱ و ۲

مثال ۲ - مقادیر ریشه‌های ترینم $f(x) = 25x^2 - 184x + 179$ را نسبت به دو عدد ۱ و ۱۰ امتحان کنید

نتیجه تبدیل x به ۱ و ۱۰ عبارتند از دو عدد مثبت $f(1) = 20$ و $f(10) = 839$ یعنی بعلامت a پس در این صورت باید دیسکریمینان را تشکیل داد و چون مقدار دیسکریمینان ($b'^2 - ac = 92^2 - 25\times 179 = 3989$) مثبت است پس ریشه‌های ترینم حقیقی باشند و نصف مجموع دو ریشه یعنی $\frac{92}{25}$ واقع است مابین ۱ و ۱۰ بنابراین ریشه‌ها واقع میگردند مابین ۱ و ۱۰ یعنی یکی مابین ۱ و $\frac{92}{25}$ و دیگری مابین $\frac{92}{25}$ و ۱۰

مثال ۳ - ریشه‌های معادله $x^2 - 2(3\lambda + 2)x + 6\lambda = 0$ را نسبت به ۰ و ۱ بحسب مقادیر λ که از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ترتیب دهید ابتدا $f(0)$

$f(1)$ را تشکیل میدهیم $f(0)=9\lambda$ و $f(1)=-3$ و چون مقدار $f(1)$ همواره منفی است پس معادله مفروضه همواره دارای ریشه‌های حقیقی خواهد بود و امّا $f(0)$ بازاء $\lambda=0$ تغییر علامت کند و ما خلاصهٔ این نتایج را در جدول ذیل قرار دهیم

λ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(0)$	$-$		$+$
$f(1)$	$-$		$-$
	x' 0 1 x''		0 x' 1 x''

مثال ۳ — ریشه‌های معادله ذیل را نسبت به ۱ و ۰ مرتب کنید

$$(\lambda-1)x^2-2(3\lambda+1)x+9\lambda=0$$

ابتدا $f(-1)$ و $f(0)$ را تشکیل میدهیم $f(-1)=16\lambda+1$ و $f(0)=9\lambda$ و این دو مقدار تغییر علامت کنند وقتیکه λ بگذرد بر دو مقدار $-\frac{1}{16}$ و ۰ و ضرب $x'x''$ نیز بازاء $\lambda=1$ تغییر علامت کند و ما خلاصهٔ این نتایج را در جدول ذیل آوردیم

λ	$-\infty$	$-\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{16}$	0	1	$+\infty$
ضرب $x'x''$		$-$	$-$	$-$	$+$	
$f(-1)$		$-$	$+$	$+$	$+$	
$f(0)$		$-$	$-$	$+$	$+$	
	ریشه نیست	-1 x' x'' 0	x' -1 x'' 0	x' -1 0 x''	-1 0 x' x''	

می‌بینیم که در فاصله $(-\frac{1}{16}$ و ۰$)$ معادله صاحب دو ریشه است و ۱− واقع است مابین اندو ریشه و ۰ در خارج باین ترتیب x' -1 x'' 0

و در فاصله (۱ و ۰) معادله دارای دو ریشه است و ۱− و ۰ واقعند مابین اندو ریشه باین ترتیب x' -1 0 x'' و برای فواصل $(-\infty$ و $-\frac{1}{16})$ و $(1$ و $+\infty)$ باید $ac-b'^2$ را تشکیل $=(\lambda-1)9\lambda-(3\lambda+1)^2=15\lambda+1$ پس هرگاه λ بزرگتر از $-\frac{1}{15}$ باشد معادله دارای دو ریشه خواهد بود و این مقدار کوچکتر است از $-\frac{1}{16}$ پس در فاصله $-\infty$ تا $-\frac{1}{15}$ معادله ریشه ندارد و امّا برای فاصله $-\frac{1}{15}$ تا $-\frac{1}{16}$ نصف مجموع دو ریشه یعنی $\frac{3\lambda+1}{\lambda-1}$ را تشکیل میدهیم مخرج این کسر منفی است و صورتش مثبت پس مقدار کسر نیز منفی است و آنرا با ۱− می‌سنجیم بنابراین تفاضل $\frac{3\lambda+1}{\lambda-1}-(-1)$ را حساب میکنیم و چون $\lambda-1$ منفی است پس تفاضل مفروض مثبت میشود و نصف مجموع ریشه‌ها بزرگتر شود از ۱− بنابراین دو ریشه واقع میگردد مابین ۰ و ۱− باین ترتیب -1 x' x'' 0

و امّا در فاصله اخیر محاسبهٔ نصف مجموع دو ریشه بی فایده است چونکه حاصل ضرب $\frac{9\lambda}{\lambda-1}$ مثبت است و همچنین $\frac{2(3\lambda+1)}{\lambda-1}$ پس هر دو ریشه مثبت میگردند و این ترتیب نتیجه میشود -1 0 x' x''

۳ — نامساویهای درجه دوّم

۳۳۰ -- **حل نامساوی درجهٔ دوّم** هر نامساوی یک مجهولی درجهٔ دوّم را پس از نقل جمیع جمل آن بیک طرف و اختصارات لازمه میتوان همواره بیکی از دو صورت ذیل درآورد

(۲) $ax^2+bx+c<0$ (۱) $ax^2+bx+c>0$

و چون بواسطهٔ تغییر علامت طرفین میتوان همواره نامساوی (۲) را بصورت نامساوی (۱) درآورد پس اکتفا کنیم فقط به بحث نامساوی (۱)

حل کردن نامساوی $ax^2+bx+c>0$ عبارتست از یافتن مقادیری از x که بازاء آنها ترینم ax^2+bx+c مقادیر مثبته اختیار کند بنابراین باید ابتدا علامت و دیگر مبیّن b^2-4ac را معلوم نمود

اوّلاً فرض میکنیم a مثبت باشد در این حالت هرگاه $b^2-4ac \le 0$ بازاء هر مقداری از x مقدار ترینم مثبت میشود بنابراین نامساوی (۱) همواره محقق و برقرار است مگر بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ وقتیکه b^2-4ac مقدار ترینم صفر میشود و اگر و دیگر مبیّن b^2-4ac مثبت باشد بازاء هر مقداری از x که در خارج ریشه‌ها باشد یعنی بزرگتر از ریشهٔ بزرگتر و کوچکتر از ریشهٔ کوچکتر باشد مقدار ترینم مثبت است بنابراین نامساوی (۱) همواره محقق است

ثانیاً فرض میکنیم a منفی باشد در این صورت هرگاه $b^2-4ac \le 0$ ترینم همواره بعلامت a است یا صفر بنابراین نامساوی (۱) بازاء هیچ مقداری از x هرگز محقق نمیشود و اگر $b^2-4ac>0$ نامساوی (۱) فقط بازاء هر مقداری از x مابین دو ریشه محقق میگردد

در نامساوی (۲) عکس حالات مذکوره فوق حاصل شود

مثال ۱ - فرض میکنیم دو نامساوی ذیل را (۱) $8x^2-12x+7>0$ (۲) $5x^2-14x+11<0$ ریشه‌های هر دو ترینم موهومی هستند پس نامساوی (۱) بازاء هر مقداری از x محقق است ولیکن نامساوی (۲) بازاء هیچ مقدار x محقق نیست

مثال ۲ - در نامساوی $8x^2-22x+15>0$ دو ریشهٔ ترینم عبارتند از $\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{2}$ پس جمیع مقادیر x محصوره مابین $(-\infty, \frac{5}{4})$ و $(\frac{3}{2}, +\infty)$ در نامساوی مفروض صدق میکنند و امّا جمیع مقادیر x که در نامساوی ذیل $8x^2-22x+15<0$ صدق کنند واقعند مابین دو ریشهٔ $\frac{5}{4}$ و $\frac{3}{2}$

۳۳۱ - هرگاه نامساوی حل کردنی از درجهٔ بالاتر از درجهٔ دوّم باشد طرف اوّل آنرا بصورت $ABC>0$ حاصل ضرب عوامل درجهٔ اوّل یا دوّم درآوریم

بطوریکه A و B و C از کثیرالجمله های درجه اول یا درجه دوم باشند و بعد علامت هرکدام از عوامل را علاحده معلوم میکنیم و مقادیری بجهت x اختیار میکنیم که بازاء آنها حاصل ضرب ABC علامت (+) باشد ولیکن چون هرکدام از این عوامل A و B و C نتواند تغییر علامت کند مگر وقتیکه دارای ریشه باشد پس ابتدا ریشه های سه عامل را استخراج میکنیم و بعد این ریشه ها را بحسب مقادیر صعودی مرتب میکنیم تا رشته اعدادی تشکیل شود که اگر چنانچه مقادیر x واقع گردند مابین هر دو عدد متوالیه از این رشته هرکدام از عوامل مذکوره دارای علامت ثابتی باشد بنابراین برای حل نامساوی مفروض کافیست که مقادیر x را مابین فواصلی اختیار کنیم که علامت حاصل ضرب عوامل (+) باشد و علاوه براین باید دانست که هرگاه یکی از عوامل همواره یک علامت ثابتی باشد میتوان طرفین نامساوی را بر آن عامل قسمت کرده آنرا حذف نمود (بدیهی است که اگر عامل حذف کردنی منفی باشد باید جهت نامساوی را تغییر داد)

مثال ۱ – نامساوی ذیل را حل کنید

$$(x-1)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)<0$$

عامل دوم تجزیه شود بر $(x-1)(x-2)$ پس چنین خواهیم داشت

$(x-1)^2(x-2)(x^2+x+1)>0$ و میتوان عوامل مثبته $(x-1)^2$ و (x^2+x+1) را حذف نمود پس نامساوی مفروض منجر میشود بصورت $x-2>0$ بنابراین نامساوی بازاء $x>2$ همواره محقق است

مثال ۲ – نامساوی ذیل را حل کنید

$$(x-1)^2(x^2-5x+6)(x^3-2x^2+2x-1)>0$$

چون عامل $(x-1)^2$ مثبت است میتوان آنرا حذف نمود و عامل (x^2-5x+6) چون قابل قسمت است بر $(x-1)$ آنرا میتوان چنین نوشت $(x-1)(x^2-x+1)$ پس نامساوی مفروض باین صورت در آید

$(x-2)(x-3)(x-1)(x^2-x+1)>0$ عامل اخیر همواره مثبت است چونکه دیسکریمینان منفی است پس کافیست که سه عامل اول را ملاحظه نمود و از آنها فاصله های ذیل نتیجه شوند

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$		$+$	

پس می بینیم که هرگاه مقادیر x را در فاصله اول و سوم اختیار کنیم در نامساوی مفروض صدق نمیکنند ولیکن اگر مقادیر x در فاصله دوم و آخر یعنی مابین ۱ و ۲ و یا بزرگتر از ۳ باشند نامساوی محقق میگردد

مثال ۳ – نامساوی ذیل را حل کنید

$$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3)(x^2+x+1) > 0$$

چون عامل چهارم همواره مثبت است میتوان آنرا حذف نمود و نامساوی مفروض معادل گردد با نامساوی ذیل

$$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3) > 0$$

و بازاء (عامل اول) $x=0$ صفر میشود و همچنین عامل دوم بازاء $x=1$ و $x=2$ و عامل سوم بازاء $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-3$ نیز صفر میگردند و چون در علامات عوامل بحث کنیم می بینیم که نامساوی مفروض فقط در سه حالت ذیل محقق است وقتیکه $-3 < x < -\frac{1}{2}$ یا $0 < x < 1$ و یا $x > 2$ پس از آنجا جدول ذیل تشکیل میشود

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	$+\infty$
	−	+	−	+	−	+	

۲۳۲- وقتیکه نامساوی حل کردنی کسری باشد بصورت $\frac{A}{B} > 0$ چون طرفین آنرا در مجذور مخرج ضرب کنیم تبدیل شود به نامساویهای سابقه و واضح است که نامساوی $\frac{A}{B} > 0$ معادل است با نامساوی $AB > 0$ و علاوه براین ممکن است هر نامساوی کسری را مستقیماً حل نمود باین طریق که در علامات صورت و مخرج آن علاحده بحث کنیم و اگر نامساوی حل کردنی ابتدا بصورت $\frac{A}{B} > 0$ نباشد جمیع جمل آنرا بطرف اول نقل میکنیم تا باین صورت در آید

مثال ۱- حل کنید این نامساوی را $\frac{3x+1}{2x-5} > 10$ چون دو طرف نامساوی را در مجذور $(2x-5)$ که مقدار آن بازاء هیچ مقدار حقیقی x منفی نیست ضرب کنیم نامساوی مفروض بصورت ذیل در آید

$(2x-5)(3x+1) > 10(2x-5)^2$ و چون جمیع جمل را بطرف اول نقل کنیم پس از اختصار چنین میشود $(2x-5)(x-3) < 0$ پس مقادیر x که در نامساوی مفروض صدق کنند واقعند ما بین $\frac{5}{2}$ و ۳

مثال ۲- نامساوی ذیل را حل کنید $x > \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-3}$ پس از نقل جمیع جمل بطرف اول و اختصارات لازمه چنین میشود $\frac{x^3-5x^2+9x-5}{(x-2)(x-3)} > 0$.

و چون طرفین را در مجذور مخرج ضرب کنیم چنین میشود $(x^3-5x^2+9x-5)\times(x-2)(x-3) > 0$ و چون عامل اول قابل قسمت است بر $(x-1)$ پس میتوان چنین نوشت $(x-1)(x^2-4x+5)\times(x-2)(x-3) > 0$ و علاوه براین عامل (x^2-4x+5) همواره مثبت است پس میتوان از آن صرف نظر نمود و بنابراین نامساوی حل کردنی چنین خواهد بود $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ و چون بطریق مسئلهٔ سابق بحث کنیم می بینیم که نامساوی مفروض بازاء $1 < x < 2$ و $x > 3$ محقق است

مثال ۳- حل کنید این نامساوی را $\frac{x-2}{x-1} < 1+\frac{x-4}{x-3}$

چون جمع حل را بطرف اول نقل کنیم پس از اختصارات لازمه چنین میشود

$\frac{x^2-4x+1}{(x-1)(x-3)} > 0$ صورت کسر طرف اول نامساوی بازاء $x=2\pm\sqrt{3}$ صفر میشود و مخرجش بازاء $x=1$ و $x=3$ و چون صورت را به N و مخرج را به D بنامیم جدول علامات صورت و مخرج و همچنین کسر $\frac{N}{D}$ طرف اول نامساوی بازاء مقادیر x چنین میشود

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	۱	۳	$\sqrt{3}$ $+\infty$
N	+	−	−	−	+
D	+	+	−	+	+
$\frac{N}{D}$	+	−	+	−	+

۴- تغییرات ترینم درجه دوم

۲۳۳- تغییرات ترینم درجه دوم اتصالی است

هرگاه در ترینم $y=ax^2+bx+c$ مقدار متغیر x از $-\infty$ تا $+\infty$ بطریق اتصالی تغییر کند مقدار ترینم y نیز بطریق اتصالی تغییر خواهد کرد

فرض میکنیم دو مقدار متوالیه x_0 و x_0+h به متغیر x داده شود (h مقداریست مثبت و بی نهایت کوچک) y نیز دو مقدار نظیر y_0 و y_0+K اختیار خواهد نمود و حال گوئیم که میتوان مقدار h را انقدر

کوچک گرفت که تغییر ترینم نیز انقدر کوچک شود که بخواهیم

برهان- چون دو تساوی $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ و $y_0+K=a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c$ را از یکدیگر نقصان کنیم

پس از اختصار این تساوی ذیل حاصل شود

$$K=2ax_0h+ah^2+bh=h(2ax_0+b+ah)$$

و چون h خیلی کوچک است میتوان همواره از ما بین ۰ و عدد معلوم α تصور نمود و بنابراین کثیر الجمله $2ax_0+b+ah$ نزدیک میشود به $2ax_0+b$ و دارای مقدار محدود مطلقی باشد که هرگز نتواند از عدد M تجاوز کند پس مقدار مطلق K کوچکتر خواهد شد از Mh و لیکن میتوان h را انقدر کوچک گرفت که حاصل ضرب Mh کوچکتر گردد از هر عدد بی نهایت کوچک ε یعنی $h<\frac{\varepsilon}{M}$ و آنوقت مقدار مطلق K بطریق اولی کوچکتر شود از ε و علاوه براین چون K نمایش نمو (مثبت یا منفی) ترینم است وقتیکه x از x_0 رسد به x_0+h پس ترینم بازاء تغییرات اتصالیه x بطریق اتصالی تغییر خواهد نمود

مثال- در ترینم $y=5x^2+3x-7$ فرض میکنیم $x=8$ و

$\frac{1}{1000}=\epsilon$ پس $y=337$ و $M=2\cdot5\cdot8+3=83$

و $\alpha=\frac{\epsilon}{M}=\frac{1}{83000}$ پس بازاء هر مقداری از x محصور مابین $8-\frac{1}{83000}$ و $8+\frac{1}{83000}$ مقدار ترینم واقع گردد مابین $337-\frac{1}{1000}$ و $337+\frac{1}{1000}$

۲۲۴ — **جهت تغیرات ترینم درجه دوّم** — برای دانستن تغیرات معرّف $y=ax^2+bx+c$ وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند ابتدا ترینم را بصورت ذیل در آوریم

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

و بعد چنین قرار میدهیم $Z=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

و از آنجا $y=aZ$ مقدار y مساویست با حاصل ضرب a در Z یعنی حاصل جمع دو مقدار جبری که یکی $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ثابت است و دیگری $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ مقداریست متغیّر پس برای پیروی تغیرات y باید تغیرات Z را معیّن نمود و برای تعیین تغیرات Z کافیست که تغیرات $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ را معلوم کنیم بنابراین گوئیم که هرگاه x از $-\infty$ تا $-\frac{b}{2a}$ ترقی کند مقدار $x+\frac{b}{2a}$ منفی است و از $-\infty$ ترقی کند تا رسد به 0

و مقدار مطلقش از $+\infty$ تا 0 تنزّل میکند و مجذورش $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ نیز از $+\infty$ تنزّل کند تا رسد به 0 پس وقتیکه x از $-\infty$ تا $-\frac{b}{2a}$ ترقی کند مقدار Z از $+\infty$ تنزّل کند تا رسد بمقدار $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ و چون x از $-\frac{b}{2a}$ تا $+\infty$ ترقی کند مقدار $x+\frac{b}{2a}$ مثبت است و از 0 تا $+\infty$ نمو میکند و مجذورش نیز از 0 ترقی کند تا رسد به $+\infty$ پس Z از مقدار $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ترقی کند و رسد به $+\infty$

خلاصه این تغیرات در جدول ذیل نموده شده است

x	$-\infty$	↗ نمو کند	$-\frac{b}{2a}$	↗ نمو کند	$+\infty$
Z	$+\infty$	↘ تنزّل کند	$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$	↗ ترقی کند	$+\infty$

و حال برای یافتن تغیرات $y=ax^2+bx+c$ دو حالت منظور آوریم بحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد

حالت اوّل $a>0$ مقدار y ترقی میکند وقتیکه مقدار Z ترقی کند و تنزّل میکند وقتیکه مقدار Z تنزّل کند خلاصه تغیرات y را در جدول ذیل نمودیم

$a>0$

x	$-\infty$	↗ نمو کند	$-\frac{b}{2a}$	↗ نمو کند	$+\infty$
y	$+\infty$	↘ تنزّل کند	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ مینیموم	↗ ترقی کند	$+\infty$

مقدار $\frac{4ac-b^2}{4a}$ نظیر $x=-\frac{b}{2a}$ عبارتست از مینیموم یعنی کوچکترین مقداری
که ترینوم اختیار کند و علاوه بر این چون y بطریق اتصالی تغییر میکند وقتیکه
x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند پس ضمناً دو مرتبه بهر مقدار بزرگتر از $\frac{4ac-b^2}{4a}$
خواهد گذشت و فقط یکمرتبه باین مقدار مینیموم میگذرد و باید ملتفت شد که هرگاه
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ کوچکتر از صفر باشد یعنی b^2-4ac مثبت باشد در این صورت ترینوم بازاء
دو مقدار مختلف x دو مرتبه از صفر خواهد گذشت یعنی دارای دو ریشه حقیقی و متمایز خواهد بود

حالت دوم $a<0$ مقدار y یا حاصل ضرب a در z ترقی میکند وقتیکه z تنزل کند
و تنزل میکند وقتیکه z ترقی کند خلاصه این تغییرات در جدول ذیل نموده شده است

$a<0$					
x	$-\infty$	نمو کند ↗	$-\frac{b}{2a}$	نمو کند ↗	$+\infty$
y	$-\infty$	ترقی کند ↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	تنزل کند ↘	$-\infty$

مقدار $\frac{4ac-b^2}{4a}$ نظیر $x=-\frac{b}{2a}$ در این حالت عبارتست از ماکزیموم
یعنی بزرگترین مقداری که ترینوم اختیار کند علاوه بر این چون تغییرات ترینوم
اتصالی است y دو مرتبه بهر مقدار کوچکتر از ماکزیموم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ خواهد گذشت
و فقط یکمرتبه از این مقدار ماکزیموم میگذرد و هیچ مقداری بزرگتر از آن اختیار
نمیکند و مخصوصاً هرگاه ماکزیموم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ بزرگتر از صفر باشد یعنی
b^2-4ac مثبت باشد ترینوم بازاء دو مقدار مختلف x صفر میشود و دارای دو ریشه

حقیقی و متمایز خواهد بود

۲۳۵ — **تنبیه ۱** — هرگاه میان جمیع مقادیریکه متغیر اختیار کند یکی
بزرگتر از جمیع مقادیر دیگر باشد آنرا ماکزیموم مطلق آن متغیر نامند
و اگر میان جمیع مقادیریکه متغیر اختیار کند یکی کوچکتر از جمیع مقادیر دیگر
باشد آنرا مینیموم مطلق آن متغیر گویند پس از آنچه مقدم شد چنین استنباط
کنیم که وقتیکه a مثبت باشد ترینوم بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ میرسد به مینیموم مطلق
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ و اگر a منفی باشد ترینوم خواهد رسید به ماکزیموم مطلق
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ و علاوه بر این تحقیق مقدار ماکزیموم یا مینیموم از روی اصول
ذیل بسیار سهل است

سؤال — بازاء چه مقادیری از x ترینوم مفروض دارای مقدار معین
y خواهد بود

مقادیر مطلوبه عبارتند از ریشه‌های این معادله $ax^2+bx+c=y$
یا $ax^2+bx+c-y=0$ و برای اینکه معادله دارای ریشه باشد
این شرط لازمست $b^2-4a(c-y)\geq 0$ یا $4ay\geq 4ac-b^2$
پس اگر a مثبت باشد باید چنین داشت $y\geq\frac{4ac-b^2}{4a}$ و از اینجا معلوم میشود

که هیچ مقداری به x نتوان داد که بازاء آن مقدار ترنیم کوچکتر گردد از
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ و اگر a منفی باشد باید چنین داشت $y \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$
و در این حالت نیز بدیهی است که هیچ مقداری از x یافت نشود که بازاء
آن مقدار ترنیم بزرگتر باشد از $\frac{4ac-b^2}{4a}$ و مخصوصاً وقتی که
$y=0$ شرایط فوق چنین میشوند بازاء $a>0$ باید چنین داشت
$0 \geqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$ و بازاء $a<0$ باید $0 \leqslant \frac{4ac-b^2}{4a}$
و در هر دو حالت چنین حاصل شود $b^2-4ac \geqslant 0$
پس برای اینکه ترنیم صفر گردد باید دیسکریمینان مثبت یا صفر باشد در
اینجا باز شرط حقیقت ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ ظاهر است

۳۲۶ — تنبیه ۲ — وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند y دو
مرتبه بیک مقدار خواهد گذشت مرتبه اول بازاء مقادیر x کوچکتر از
$-\frac{b}{2a}$ و مرتبه ثانی بازاء مقادیر x بزرگتر از $-\frac{b}{2a}$ چنانکه اگر دو مقدار
متساوی البعد از $-\frac{b}{2a}$ مثلاً $-\frac{b}{2a}+\alpha$ و $-\frac{b}{2a}-\alpha$ به
x داده شود ترنیم دارای دو مقدار متساویه ذیل خواهد بود

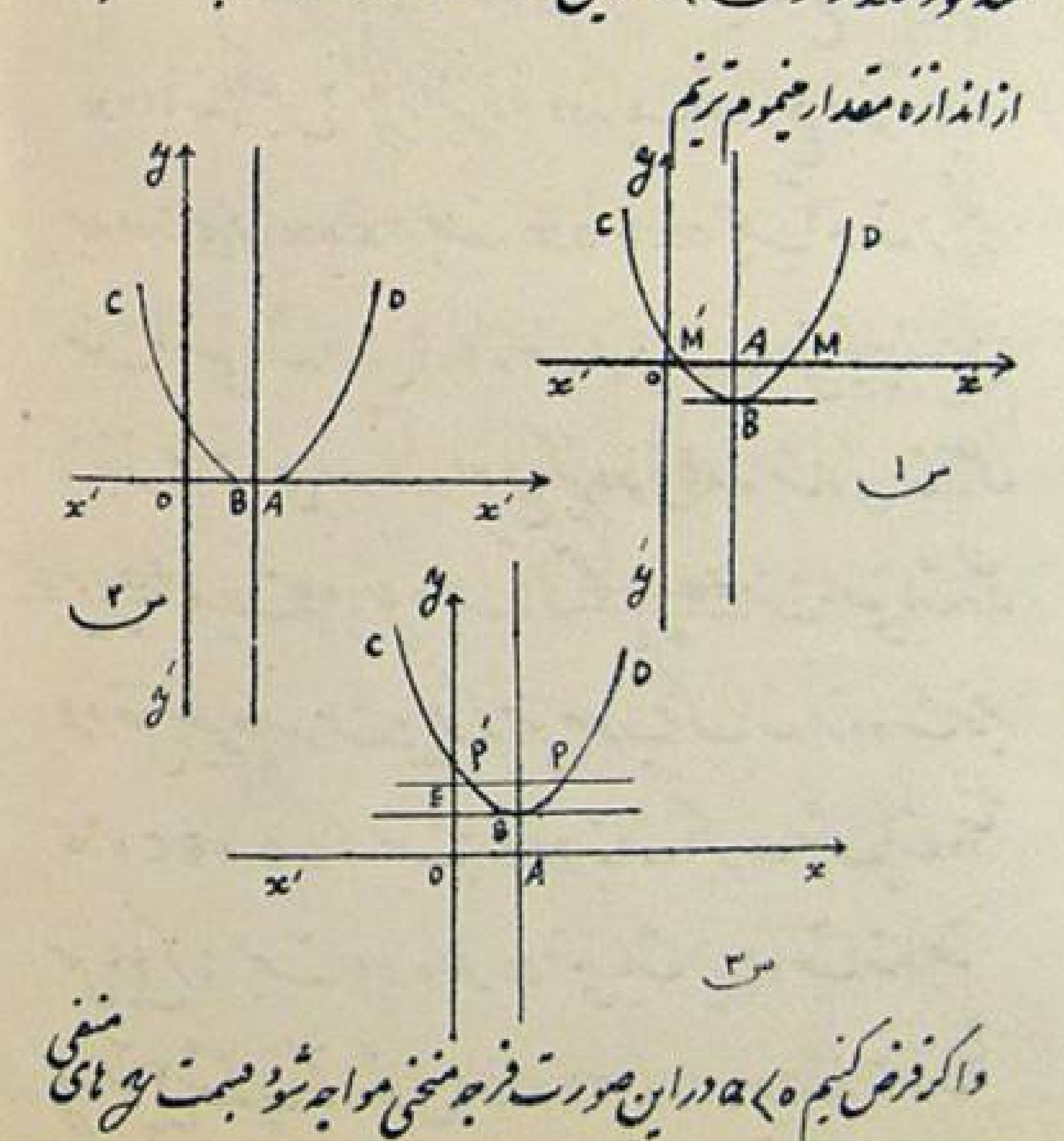
$$a\left[(+\alpha)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] \quad \text{و} \quad a\left[(-\alpha)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

چونکه مجذور $(-\alpha)$ و $(+\alpha)$ متساویند

۳۲۷ — نمایش هندسی تغییرات ترنیم

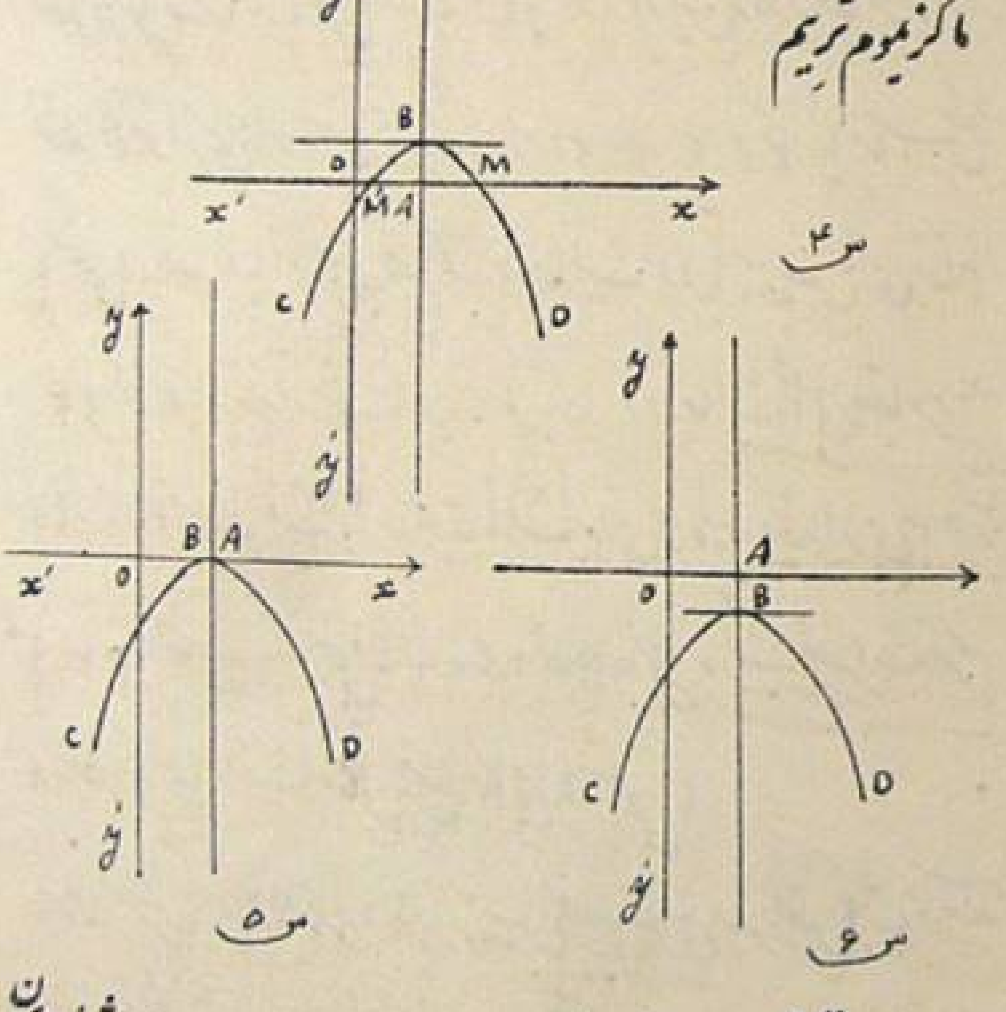
چون x از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی کند میتوان تغییرات ترنیم درجه دوم را مانند
تغییرات دو جمله $ax+b$ بشکل هندسی نمود بعبارة اخری منحنی معادله
$y=ax^2+bx+c$ را رسم نمود
دو محور مختصات قائم xox' و yoy' را در یک سطح رسم میکنیم و
x را مانند آبسیس و y را بمنزله اردونه یک نقطه از سطح منظور آوریم و
بعد در روی محور xox' در جهت ox یا ox' بحسب آنکه مقدار $-\frac{b}{2a}$
مثبت یا منفی باشد طول oA را مساوی مقدار مطلق $\frac{b}{2a}$ نقل میکنیم و
از نقطه A عمودی بر xox' اخراج کنیم و طول AB را مساوی مقدار مطلق
$\frac{4ac-b^2}{4a}$ در جهت oy یا oy' بحسب آنکه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ مثبت یا منفی باشد بر آن
عمود نقل میکنیم و بسهولت می بینیم که منحنی مطلوب مرکب باشد از دو شاخه غیر
محدود BC و BD که نسبت به AB قرینه اند و اگر a مثبت باشد دو شاخه
منحنی مایل گردد بسمت oy و اگر a منفی باشد این دو شاخه در جهت
oy' متمایل شوند چنانکه اشکال (۱) و (۲) و (۳) عبارتند از اوضاع

مختلفه منحنی درصورتیکه a را مثبت فرض کنیم وهرگاه b^2-4ac مثبت باشد منحنی قطع کند محور $x'ox$ را بر دو نقطه M و M' بطوریکه آبسیس های OM و OM' نمایش ریشه های حقیقی ومتمایز x' و x'' باشند (س ۱) واگر b^2-4ac صفر باشد منحنی مماس شود بر $x'ox$ در نقطه A که آبسیسش مساوی $-\frac{b}{2a}$ باشد (س ۲) وبالاخره هرگاه b^2-4ac منفی باشد منحنی قطع نکند محور $x'ox$ را (س ۳) ودر این سه حالت اردونهٔ AB عبارت است از اندازه مقدار مینیموم ترینم



واگر فرض کنیم $a<0$ در این صورت فرجه منحنی مواجه شود بسمت y های منفی

وآنوقت ترتیبات منحنی موافق شکل (۴) و (۵) و (۶) تواند بود چنانکه اگر $b^2-4ac>0$ منحنی تلاقی کند محور $x'x$ را بر دو نقطه M و M' که آبسیس آنها عبارتند از دو ریشه x' و x'' ترینم (س ۴) وهرگاه $b^2-4ac=0$ منحنی مماس شود بر محور $x'x$ در نقطه A که آبسیس آن $-\frac{b}{2a}$ باشد (س ۵) وبالاخره اگر $b^2-4ac<0$ در این صورت منحنی قطع نکند محور $x'x$ را (س ۶) ودر این سه حالت اردونهٔ AB عبارت است از اندازه مقدار ماکزیموم ترینم



۲۳۸ — تنبیه — هرگاه ضرایب a و b و c بعدد باشند میتوان

نقاط کثیری از منحنی را بدست آورد و بعد آن نقاط را بیکدیگر وصل نمود تا منحنی
نمایش ترنیم تشکیل گردد پس اگر منحنی بطور صحت و دقت رسم شود به مدد آن
میتوان مقادیر x را بازاء مقدار معلوم y تعیین نمود مثلاً فرض میکنیم در
شکل (۳) قطعه خط oE مساوی مقدار معلوم y را در جهت مناسب بر محور
yoy' نقل میکنیم و بعد از نقطه E خطی بموازات ox رسم کنیم آبسیس های
نقاط تلاقی این خط با منحنی عبارتند از مقادیر مطلوبه x و اما بحسب مقدار
معلوم y سه حالت ممکن است اتفاق افتد از این قرار که خط مرسوم از
نقطه E موازی با ox قطع کند منحنی را بر دو نقطه P و P' یا مماس شود
با منحنی در نقطه B یا آنرا هیچ قطع نکند در حالت اول آبسیس های نقاط
P و P' عبارتند از مقادیر مطلوبه x و در حالت ثانی مقادیر x
برابرند با آبسیس نقطه B و در حالت ثالث برای x هیچ مقداری موجود نباشد

۲۲۹ - قضیه - منحنی $y = ax^2 + bx + c$ نمایش تغییرات ترنیم
درجه دویم عبارتست از شکل قطع مکافی (شلجمی)
هرگاه فرض کنیم AR محور و A رأس قطع مکافی مفروض باشد در هندسه
مقدماتی ثابت شده است که نسبت مربع عمود MQ وارد از نقطه غیر مشخص

از منحنی بر محور AR به AQ فاصله رأس منحنی از آن عمود مقداریست ثابت
($\frac{\overline{MQ}^2}{AQ}$ همواره ثابت است) و بالعکس هر منحنی که دارای چنین خاصیت
باشد عبارتست از قطع مکافی که به محور AR و برأس A باشد
پس از این مقدمه فرض میکنیم CBD
منحنی نمایش تغییرات ترنیم
$y = ax^2 + bx + c$ باشد و M نقطه غیر مشخص از منحنی و x و y مختصات
این نقطه باشند و بعد از نقطه M خط MP را عمود کنیم بر ox و هم چنین
MQ را بر AB فرود آوریم و فرض میکنیم H نقطه تلاقی MP باشد با خط مماس
در B بر منحنی پس گوئیم $\frac{\overline{MQ}^2}{BQ}$ مقداریست ثابت
برهان - هر نقطه غیر مشخص M که در روی
منحنی فرض کنیم در جمیع حالات چنین خواهیم
داشت $\overline{QM} = \overline{oP} - \overline{oA} = x + \frac{b}{2a}$

و $BQ = HM = PM - PH = y - \frac{4ac - b^2}{4a}$

و چون $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$

پس از آنجا $\overline{BQ} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ و $\frac{\overline{MQ}^2}{BQ} = \frac{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{1}{a}$

نقطه M هرچه باشد مقدار α همواره ثابت است پس منحنی نمایش ترنیم عبارتست از قطع مکانی که به محور AB و به رأس A باشد

۳۴۰ - تغییرات ترنیم درجه دوم وقتیکه x مابین دو عدد معلوم α و β تغییر کند غالباً فرض مسئله چنین اقتضا کند که مقدار متغیر x محصور گردد مابین حدود معینه در این صورت تغییرات ترنیم را فقط در همان حدود تعیین کنیم پس اگر α کوچکتر از β باشد ابتدا مواضع این دو عدد را نسبت به $-\frac{b}{2a}$ بدست میآوریم و این سه عدد را بحسب مقادیرشان ترتیب میدهیم و از تمام جدول کلی تغییرات ترنیم فقط فاصله مابین α و β را منظور آوریم و بحسب علامت a که مثبت یا منفی باشد دو حالت رخ دهد و از برای نمایش هندسی تغییرات مذکوره از تمام منحنی قطع مکانی فقط قوس نظیر مقادیر x را مابین α و β اختیار کنیم

مثال ۱ - معلوم کنید تغییرات ترنیم $y = x^2 - 5x + 4$ را

ابتدا ترنیم را باین صورت در آوریم $y = (x - \frac{5}{2})^2 - \frac{9}{4}$ چون x از $-\infty$ تا $\frac{5}{2}$ نمو کند $(x - \frac{5}{2})$ منفی است و از $-\infty$ ترقی کند تا ۰ و اما مجذورش $(x - \frac{5}{2})^2$ از $+\infty$ تا ۰ تنزل کند و y نیز از $+\infty$ تنزل کند

تا رسد به $-\frac{9}{4}$ و منحنی مرکب باشد ابتدا از یک شاخه غیر محدود BA که از الی غیر النهایه نزول کند تا رسد به نقطه A که مختصاتش $\frac{5}{2}$ و $-\frac{9}{4}$ باشند

و چون x از $\frac{5}{2}$ تا $+\infty$ نمو کند $(x - \frac{5}{2})$ مثبت است و از ۰ تا $+\infty$ ترقی کند و مجذورش نیز از ۰ تا $+\infty$ ترقی میکند و y از $-\frac{9}{4}$ ترقی کند تا رسد به $+\infty$ پس شاخه دیگر منحنی AC ابتدا از A الی نهایت صعود کند و بازاء $x = 0$ چنین حاصل شود $y = 4$ پس منحنی قطع کند محور yها را در نقطه I که مختصاتش ۰ و ۴ باشند و y بازاء $x = 1$ و $x = 4$ صفر میشود پس منحنی قطع کند محور x را در دو نقطه P (۱ و ۰) و Q (۴ و ۰) و چون ترنیم باین صورت نوشته شود $(y + \frac{5}{2})^2 = (y + 2)^2 + (x - \frac{5}{2})^2$ از اینجا ظاهر است که کانون منحنی نقطه F است مختصات $\frac{5}{2}$ و -2 و خط هادی آن عبارتست از DD' که معادله‌اش اینست $y = -\frac{5}{2}$

خلاصه بحث های فوق در جدول ذیل نموده شده است

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

امثله متعلق بفصل چهاردهم

۱ـ ترنیم های ذیل را بحاصل ضرب دو عامل درجه اول تجزیه کنید

$12x^2-x-1$ و x^2-4x+1 و $5x^2+8x-9$

$3x^2-12x+5$ و $(1-x)^2+(x+2)^2-(x^2+1)$

$R^2-\left[x^2+2\left(\frac{R-x}{2}\right)^2\right]$ و $-2x^2-3x+5$

۲ـ مواضع اعداد ۳ و ۵ و ۱ـ را نسبت بریشه های معادلات ذیل معلوم کنید

$x^2+3x-2=0$ و $2x^2+7x-1=0$ و $x^2-4x+3=0$

۳ـ ریشه های معادلات ذیل را نسبت باعداد ۱ و ۲ مرتب کنید

$x^2-2(\lambda+3)x+4=0$ و $x^2-(\lambda+4)x+4-\lambda=0$

$\lambda x^2-2(\lambda+1)x+\lambda-1=0$ و $x^2-4(\lambda+1)x-\lambda=0$

۴ـ مقدار λ را چنان معلوم کنید که ریشه های معادلات ذیل واقع شوند مابین ۱ـ و ۱+

$(\lambda-3)x^2-(2\lambda+1)x-4=0$ و $(\lambda^2-1)x^2-2(\lambda-1)x+\lambda=0$

۵ـ مابین چه حدودی باید مقدار x را تغییر داد برای اینکه مقدار ترنیم

$4-3x-x^2$ مثبت باشد یا اینکه منفی

۶ـ مقدار λ را چگونه باید اختیار نمود تا اینکه یکی از ریشه های معادله ذیل $3x^2+(\lambda-1)x+3\lambda+2=0$ بزرگتر از ۳ باشد و دیگری کوچکتر از ۲

۷ـ ثابت کنید که هرگاه a و b و c اضلاع مثلث باشند ترنیم درجه دوم $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ همواره مثبت است هر چه باشد x

۸ـ معلوم کنید بازاء چه مقادیری از λ معادله ذیل دارای ریشه خواهد بود و پس از تحدید λ علامات ریشه ها را بحسب مقادیر مختلفه λ تعیین کنید

$$\lambda x^2+2(\lambda+1)x+\lambda-1=0$$

۹ـ در معادله $5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0$ هر مقداری از x نظیر است بدو مقدار از y و هم چنین هر مقداری از y نظیر است بدو مقدار از x معلوم کنید اولاً مابین چه حدودی باید x را تغییر داد تا آنکه مقادیر نظایر y حقیقی گردند ثانیاً مابین چه حدودی باید y را اختیار نمود تا آنکه مقادیر نظایر x حقیقی باشند

جواب ـ مقدار x باید کوچکتر باشد از ۵ یا بزرگتر از ۷ و مقدار y کوچکتر شود از $\frac{19-\sqrt{5}}{2}$ یا بزرگتر از $\frac{19+\sqrt{5}}{2}$ و همین سؤالات را در معادلات ذیل

معمول دارید $4x^2-6xy+5y^2-3x+4y=0$

$$9x^2+12xy+5y^2-30y-20y+26=0$$

$$x^2+12xy+4y^2+4x+8y+20=0$$

$$5x^2-12xy+4y^2+54x-4y-139=0$$

۱۰ ـ نامساویهای ذیل را حل کنید $x^2-7x+6<0$

$$x(x^2-1)(x^2-3x+2)(x^2+5x+7)>0$$

$$x(x^3-3x+2)(x^3-3x^2+2)<0$$

$$\frac{2x+3}{x-1}<\frac{x+5}{x+1}\ ,\ \frac{x-5}{x}>\frac{2x+3}{x-2}$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1 \text{ و } \frac{x^2-3x+2}{x^2-5x-6}>\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x+2}$$

۱۱ ـ مقدار λ را چنان تعیین کنید که هرچه باشد x چنین داشته باشیم

$$\frac{2x^2+2\lambda x+\lambda}{4x^2+6x+3}<1 \text{ و } \frac{5x^2+4x+4}{x^2+x+1}<\lambda$$

۱۲ ـ معلوم کنید که مابین چه حدودی باید x را تغییر داد تا آنکه کسور ذیل بزرگتر باشند از ۱ یا کوچکتر شوند از ۱

$$\frac{4x^2-5x-1}{2x^2-5x+3}$$

$$\frac{x^2-7x+12}{3(x^2-11x+18)}\ ,\ \frac{4x^2-33x+8}{5x^2-7x+2}$$

۱۳ ـ تغییرات ترینم های ذیل را معلوم کنید و نمایشات هندسی آنها را نیز رسم نمائید.

$$x^2+x+1 \text{ و } 3x^2-x-4 \text{ و } -4x^2+7x+6 \text{ و } 2x^2-4x+7$$

$$5x^2+6x-3 \text{ و } 4x^2-20x+25 \text{ و } 2+8x-3x^2 \text{ و } 2x^2-x+1$$

۱۴ ـ بازاء مقادیر x محصوره مابین ۰ و ۵ تغییرات ترینم های ذیل را معلوم کنید

$$mx^2-mx+2 \text{ و } 5x^2-3x+m \text{ و } (m-1)x^2-5x+4$$

۱۵ ـ تغییرات عبارت $5\sin^2x-3\sin x+4$ را معلوم کنید وقتی که x از ۰ تا 2π ترقی کند

۱۶ ـ مقدار λ را چنان معین کنید که منحنی $y=x^2-x+\lambda$ مماس شود بر محور ox

۱۷ ـ معادله خط مماس بر منحنی $y=x^2-3x$ را در مبدء مختصات معلوم کنید

۱۸ ـ کانون منحنی قطع مکافی $2x^2-x+1$ را معلوم کنید

۱۹ ـ مقدار λ را چنان مشخص کنید که کسور $\frac{x-\lambda}{x^2-3x+2}$ و $\frac{x^2-\lambda x+1}{x^2-5x+6}$ جمیع مقادیر ممکنه را اختیار کنند

۲۰ ـ مقدار λ و μ را طوری مشخص کنید که $\frac{2\lambda x+\mu}{x^2+x+1}$ دائماً واقع باشد مابین ۰ و ۴

۲۱ ـ هرگاه نیم دایره AMB در حول قطرش AB دوران کند معلوم کنید تغییرات مجموع حجم های حادثه از قطعات ADM و MEB را وقتیکه نقطه M در روی محیط نیم دایره سیر کند

۲۲ ـ تغییرات $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$ را معلوم کنید و شکل منحنی را از ایجاب آنکه b^2-4ac

ثبت یا صفر یا منفی باشد بنمائید و مخصوصاً منحنیات معرفات ذیل را رسم کنید

$$y=\frac{1}{x^2-8x+7}\ ,\quad y=\frac{1}{x^2-4x+4}\ ,\quad y=\frac{1}{x^2-6x+13}$$

۲۳ — ثابت کنید که ریشه‌های معادلهٔ ذیل حقیقی هستند هرچه باشد اعداد ر و ق و ه و ط

(۱ + ر² + ق²) x² − [ر(۱ + ق²) + ط(۱ + ر²) − ۲ رقه] x + (رط − ه²) = ۰

و علاوه براین ثابت کنید برای اینکه این معادله دارای دو ریشهٔ متساویه باشد لازم و کافیست که اعداد معلومه در رابطهٔ ذیل صدق کنند ط/(۱+ق²) = ه/(رق) = ر/(۱+ر²)

۲۴ — هرگاه بر خط TT' مماس بر دایره که شعاع ر باشد دو نقطهٔ A و B اختیار کنیم بطوریکه فاصلهٔ AB مساوی ۲ر باشد و در سطح دایره در طرفیکه TT' واقع شده نقطهٔ C فرض کنیم که فاصله‌اش از مماس TT' برابر ر باشد و خطی بموازات TT' رسم کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ M و N قطع کند و همچنین دو خط CA و CB را نیز در نقاط P و Q ملاقی کند اولاً تغییرات مجموع $\overline{NM}^2+\overline{PQ}^2$ را پیروی کنید وقتیکه فاصلهٔ قاطع MN از مماس از ۰ تا ۲ر نمو کند و معلوم کنید که این مجموع چند مرتبه مرور کند بر مقدار معلوم $4K^2$ و منحنیات آنها را رسم کنید ثانیاً فاصلهٔ قاطع را از مماس تعیین کنید بطوریکه مجموع $\overline{MN}^2+\overline{PQ}^2$ مساوی شود به $4K^2$ و در این مسئله بحث کنید و مطابقت نتایج این بحث جدید را با نتایج سابقه تحقیق کنید

فصل پانزدهم

معادلات قابل تبدیل بدرجهٔ دویم

۱ — معادلهٔ دو مجذوری

۲۴۱ — معادلهٔ دو مجذوری عبارتست از هر معادلهٔ درجهٔ چهارم که پس از اختصارات لازمه و نقل جمیع جمل بیک طرف فقط شامل قوای زوج مجهول باشد و بموجب این تعریف معادلهٔ دو مجذوری را همواره میتوان بصورت کلی ذیل درآورد

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (1)$$

a و b و c عبارتند از مقادیر معلومه

و حل این معادله را میتوان راجع کرد به حل معادلهٔ درجهٔ دویم از اینقرار ابتدا x^2 را مجهول فرض کرده چنین قرار دهیم $y=x^2$ (۲) و چون در معادلهٔ مفروضه x^2 را تبدیل کنیم به y معادلهٔ درجهٔ دویم ذیل تشکیل گردد

$$ay^2+by+c=0 \qquad (3)$$

و این معادله را **محلّل** معادلهٔ مفروضه نامند

هرگاه این معادلهٔ (۳) دارای دو ریشهٔ y' و y'' باشد آنها را متدرجاً بجای y در معادلهٔ (۲) قرار میدهیم پس ریشه‌های معادلهٔ (۱) عبارت شوند از ریشه‌های ذیل

دو معادلهٔ ذیل $y' = x^2$ و $y'' = x^2$

چنانکه هر مقدار حقیقی و مثبت y را نظیر گردد دو مقدار حقیقی متساویه و مختلفة العلامه از x و هر مقدار حقیقی و منفی از y را نظیر هیچ مقدار حقیقی از x نخواهد بود چون که در آنصورت معادلهٔ $y' = x^2$ یا $y'' = x^2$ محال میشود و بالاخره هرگاه معادلهٔ محلل دارای ریشه نباشد معادلهٔ مفروضه نیز ریشه نخواهد داشت

۳۴۲ — بحث در معادلهٔ دو مجذوری — از روی بیانات فوق چنین نتیجه شود اولاً هرگاه معادلهٔ محلل (۳) دارای دو ریشه حقیقی و مثبت باشد یعنی تمیز $b^2 - 4ac > 0$ ، $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{b}{a} < 0$ در این صورت معادلهٔ (۱) دارای چهار ریشه خواهد بود که دو بدو متساوی و مختلفة العلامه باشند و علاوه براین میتوان این ریشه‌ها را بآسانی بدست آورد زیرا که چون معادلهٔ محلل را حل کنیم دو ریشه آن چنین شود $y' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، $y'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و چون مقادیر x نظایر y' را به x'_1 و x'_2 بنامیم و همچنین مقادیر نظایر y'' را به x''_1 و x''_2 چنین خواهیم داشت

$$x'_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x'_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (4)$$

$$x''_1 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad x''_2 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

و این چهار مقدار را میتوان بیک فرمول نمود

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad (5)$$

ثانیاً هرگاه معادلهٔ محلل دارای دو ریشه حقیقی و منفی باشد یعنی اگر تمیز $b^2 - 4ac > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $\frac{b}{a} > 0$ در اینصورت معادلهٔ (۱) ریشه نخواهد داشت

ثالثاً اگر محلل دارای دو ریشه حقیقی و مختلفة العلامه باشد یعنی $\frac{c}{a} < 0$ در اینحالت معادلهٔ (۱) دارای دو ریشه حقیقی و متساوی و مختلفة العلامه باشد نظیر ریشه مثبت محلل و این دو ریشه حقیقی عبارتند از مقادیر ذیل x'_1 و x'_2

$$x'_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \ , \ x'_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

رابعاً هرگاه معادلهٔ محلل دارای ریشه‌های متساویه و مثبت باشد یعنی $\frac{b}{a} < 0$ و $b^2 - 4ac = 0$ در این صورت معادلهٔ (۱) دارای یک ریشه مضاعف مثبت خواهد بود $x'_1 = x''_1$ و یک ریشه مضاعف منفی $x'_2 = x''_2$ که بحسب مقدار مطلق برابر باشد با ریشه مضاعف مثبت از این قرار $x'_1 = x''_1 = +\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ، $x'_2 = x''_2 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ خامساً هرگاه ریشه‌های محلل متساوی و منفی باشند یعنی $b^2 - 4ac = 0$ و $\frac{b}{a} > 0$ در این حالت معادلهٔ (۱) ریشه نخواهد داشت

سادساً بالاخره هرگاه محلل دارای ریشه نباشد معادله دو مجذوری ریشه نخواهد داشت

خلاصه بحث فوق را در جدول ذیل آوردیم

- $b^2-4ac>0$
  - $\frac{c}{a}>0$
    - $\frac{b}{a}<0$ چهار ریشه دو بدو متساوی و مختلف العلامه
    - $\frac{b}{a}>0$ هیچ ریشه نیست
  - $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه متساوی و مختلف العلامه
  - $\frac{c}{a}=0$
    - $\frac{b}{a}<0$ یک ریشه مضاعف صفر و دو ریشه متساوی و مختلف العلامه
    - $\frac{b}{a}>0$ یک ریشه مضاعف صفر
- $b^2-4ac=0$
  - $\frac{b}{a}<0$ چهار ریشه حقیقی که دو ریشه مساوی $\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و دو ریشه دیگر مساوی $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$
  - $\frac{b}{a}>0$ هیچ ریشه نیست
  - $\frac{b}{a}=0$ چهار ریشه صفر
- $b^2-4ac<0$ معادله هیچ ریشه نخواهد داشت

و در قواعد محاسبات اعداد موهومی خواهیم دید که معادله دو مجذوری همواره دارای چهار ریشه حقیقی است یا موهومی که دو بدو مزدوج باشند

مثال ۱ - معادله ذیل را حل کنید $x^4-13x^2+36=0$

چنین خواهیم داشت $y=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm 5}{2}$

پس y دارای دو مقدار حقیقی و مثبت ۴ و ۹ باشد و از آنجا چهار مقدار حقیقی ذیل برای x حاصل شود $x=\pm 2$ و $x=\pm 3$

مثال ۲ - حل کنید این معادله را $x^4+13x^2+36=0$ ریشه های y عبارتند از دو مقدار منفی ۴- و ۹- پس برای x هیچ مقداری نخواهد بود

مثال ۳ - این معادله را حل کنید $x^4-5x^2+36=0$

برای y دو مقدار حقیقی ۹ و ۴- بدست آید و مقدار مثبت ۹ نظیر گردد بدو مقدار حقیقی متساوی و مختلف العلامه از x یعنی $x=\pm 3$ و اما مقدار منفی ۴- نظیر هیچ مقداری از x نباشد

مثال ۴ - این معادله را حل کنید $x^4-6x^2+10=0$

چون محلل شامل ریشه نیست پس معادله مفروضه نیز هیچ ریشه قبول نکند

مثال ۵ - جنس ریشه های معادلات ذیل را بیک نظر بدون حل آنها معلوم کنید

(۱) $3x^4-14x^2+5=0$ (۲) $5x^4+12x^2+4=0$

(۳) $3x^4+7x^2-8=0$ (۴) $4x^4-6x^2+3=0$

مقادیر y که بجای x^2 در معادله (۱) صدق میکنند حقیقی و مثبت اند زیرا که دیگر عبارتان $-\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ مثبت باشند پس معادله (۱) دارای ۴ ریشه حقیقی است

مقادیریکه بجای x^2 در معادله (۲) صدق میکنند حقیقی و منفی باشند چونکه دیگر بنیان و $\frac{c}{a}$ مثبت و $\frac{b}{a}$ منفی است پس معادله مفروضه بازا هیچ مقداری از x محقق نباشد

مقادیریکه بجای x^2 در معادله (۳) صدق میکنند حقیقی و مختلفه العلامه اند چونکه $\frac{c}{a}$ منفی است پس فقط دو مقدار از x در معادله (۳) صدق کنند

بالاخره هیچ مقداری بجای x^2 در معادله (۴) صدق نمیکند چونکه دیگر بنیان منفی است پس معادله (۴) بازا هیچ مقداری از x محقق نباشد

مثال ۶ - فرض میکنیم این معادله را $x^4 - 2mx^2 + 9 = 0$

دیگر بنیان معادله محلل عبارتست از $m^2 - 9$ پس هرگاه m واقع شود مابین -3 و $+3$ معادله ریشه نخواهد داشت و اگر m کوچکتر از -3 باشد ریشه های محلل منفی خواهد بود و آنوقت معادله مفروضه هیچ ریشه قبول نکند و بالاخره اگر m بزرگتر از 3 باشد معادله دارای ۴ ریشه باشد و محلل دو ریشه مثبت قبول کند

۲ - تبدیل عباراتیکه بشکل $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ باشند

۲۴۳ - وقتیکه ریشه های دو مجذوری حقیقی و متمایز باشند سابق دیدیم که بعبارت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ نموده شوند چنانکه B و $A \pm \sqrt{B}$ اعداد مثبته باشند

واگر B مجذور کامل نباشد مقادیر ریشه ها بتقریب معینی خوب بدست نیایند ولیکن بعضی اوقات چنانچه ممکن باشد میتوان باعانت مسئله حسابی ذیل عبارت فوق را تبدیل نمود به مجموع یا تفاضل دو رادیکال بسیط

مسئله - هرگاه A و B دو عدد مثبت و منطق باشند و B مجذور کامل نباشد میتوان دو عدد مثبت و منطق x و y اگر ممکن باشد بدست آورد که درین رابطه ذیل صادق آیند $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$

فرض میکنیم مقصود تبدیل $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ باشد و این رابطه را قرار میدهیم

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \qquad (1)$$

چون طرفین این معادله را مجذور کنیم هیچ ریشه خارجی در آن داخل نگردد زیرا که هر دو طرف مثبت اند و این معادله جدید حاصل شود

$$A + \sqrt{B} = x + y + 2\sqrt{xy} \quad \text{یا} \quad A - x - y + \sqrt{B} = 2\sqrt{xy} \qquad (۲)$$

و چون مجدداً معادله (۲) را مجذور کنیم چنین نتیجه میشود

$$(A-x-y)^2 + 2(A-x-y)\sqrt{B} + B = 4xy$$

و یا

$$(A-x-y)^2 + B - 4xy = 2(x+y-A)\sqrt{B} \qquad (۳)$$

و چون طرف اول این معادله بنا بفرض باید منطق باشد پس طرف ثانی نیز

بالضروره منطق خواهد بود ولی عامل $\sqrt{B}$ کا بنا بفرض اصم است و عامل $(x+y-A)$
منطق پس شرط اینکه حاصل ضرب این دو عامل منطق باشد آنستکه عامل $(x+y-A)$
مساوی صفر گردد پس از معادله (۳) چنین استخراج شود $x+y=A$
و $xy=\frac{B}{4}$ و بنابراین اگر مسئله ممکن باشد x و y ریشه های منطق
معادله درجه دوم ذیل خواهد بود $Z^2-AZ+\frac{B}{4}=0$
و از آنجا $Z=\frac{A\pm\sqrt{A^2-B}}{2}$ و مقادیر x و y چنین شوند

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \quad \text{و} \quad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

و از آنجا این دستور تشکیل گردد $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$
و چون A^2-B مجذور کامل است چنین قرار میدهیم $A^2-B=C^2$
و از آنجا $\sqrt{A}+\sqrt{B}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$
برای اینکه این ریشه ها حقیقی باشند باید A^2-B مثبت باشد و برای اینکه
ریشه ها مثبت باشند باید A نیز مثبت باشد و بالاخره برای اینکه این ریشه ها
منطق باشند باید A^2-B مجذور کامل باشد و بطور کلی شرط لازم و کافی برای
امکان مسئله آنست که A مثبت و A^2-B مجذور کامل باشد
و موافق همان شرایط مذکوره فوق میتوان عبارت $\sqrt{A-\sqrt{B}}$ را تبدیل

نمود به $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ و چنین حاصل شود

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

۲۴۴ — **تنبیه** — باید این نکته را ملتفت بود که اولاً هرگاه منطق بودن
x و y قید نشود معادله (۱) میتواند اجوبه بسیار اختیار کند ثانیاً
ممکن نیست دو عدد مثبت و منطق x و y بدست آورد که در روابط ذیل
صدق کنند $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ یا $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

مثال ۱ — عبارت $\sqrt{6\pm\sqrt{11}}$ را تبدیل کنید

چون $A=6$ و $B=11$ و $A^2-B=25=5^2$ پس حاصل شود

$$\sqrt{6+\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{6+5}{2}}+\sqrt{\frac{6-5}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}+1)$$

$$\sqrt{6-\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}-1)$$

مثال ۲ — عبارت ذیل را تبدیل کنید $\sqrt{7\pm2\sqrt{10}}$

چون $2\sqrt{10}=\sqrt{40}$ پس $A=7$ و $B=40$ و $A^2-B=3^2$

و از آنجا $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{7+3}{2}}+\sqrt{\frac{7-3}{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

و $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

مثال ۳ — ریشه های معادله دو مجذوری را اگر ممکن باشد تبدیل کنید

این ریشه ها بعبارت $\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ نموده شوند

یا $\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}$ و چون $A=-\frac{b}{2a}$

و $B=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, $A^2-B=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

پس اگر A و B و A^2-B مثبت باشند یعنی $-\frac{b}{a}$ و b^2-4ac

و $\frac{c}{a}$ مثبت باشند میتوان ریشه های معادلهٔ دو مجذوری را باین صورت درآورد

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}}}\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{c}{a}}}\right)$$

ولیکن این تبدیل حقیقتاً مفید نخواهد بود مگر وقتیکه $\frac{c}{a}$ یا ac مجذور کامل باشد

مثال ۴ — این معادله را حل کنید $x^4-18x^2+16=0$

حاصل ضرب $ac=16$ چون مجذور ۴ است پس میتوان ریشه های

$\pm\sqrt{9\pm\sqrt{65}}$ را تبدیل نموده $Z^2-9Z+\frac{65}{4}=0$

و از آنجا $Z=\frac{9\pm4}{2}$ و ریشه های مطلوب بعبارت ذیل نموده شوند

$x=\frac{9+4}{2}=\frac{13}{2}$ و $y=\frac{9-4}{2}=\frac{5}{2}$ $\quad\pm\left[\sqrt{\frac{13}{2}}\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$

مثال ۵ - ریشه های معادلهٔ $18x^4-45x^2+2=0$ را تبدیل کنید

$$x=\pm\left[\sqrt{\frac{45}{72}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}}\pm\sqrt{\frac{45}{72}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9}}}\right]=$$

$$=\pm\frac{\sqrt{57}\pm\sqrt{33}}{6\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{57}\pm\sqrt{33}\right)$$

۳ - تجزیه ترینم دو مجذوری بعاملهای درجهٔ دوم

۳۴۵ - **قضیه** — ترینم دو مجذوری ax^2+bx+c را میتوان همواره تجزیه نمود بحاصل ضرب دو عامل درجهٔ دوم

ابتدا فرض میکنیم معادلهٔ محلل ay^2+by+c دارای دو ریشه مثبت یا منفی y' و y'' باشد پس چنین قرار میدهیم

$$ay^2+by+c\equiv a(y-y')(y-y'')$$

و چون $y=x^2$ پس ترینم دو مجذوری بصورت حاصل ضرب دو عامل درجهٔ دوم درآید

$$ax^4+bx^2+c\equiv a(x^2-y')(x^2-y'') \qquad (1)$$

وقتیکه ترینم دارای چهار ریشه باشد y' و y'' مثبت میگردند و آنوقت معادله (۱) را میتوان چنین نوشت

$$ax^4+bx^2+c\equiv a(x-\sqrt{y'})(x+\sqrt{y'})(x-\sqrt{y''})(x+\sqrt{y''})$$

و اگر ترینم دارای دو ریشه باشد فقط یک ریشه از محلل مثلاً y' مثبت میگردد و آنوقت معادله (۱) را میتوان چنین قرار داد

$$ax^4+bx^2+c\equiv a(x-\sqrt{y'})(x+\sqrt{y'})(x^2-\sqrt{y''})$$

و حال فرض میکنیم معادلهٔ محلل $ay^2+by+c=0$ دارای ریشه نباشد و

قرار دهیم $q=\frac{c}{a}$ و $p=\frac{b}{a}$ و $(q>0$ و $q-\frac{p^2}{4}<0)$ ترینم دو مجذوری باین صورت درآید $ax^4+bx^2+c\equiv a(x^4+px^2+q)$

ضرب q چون مثبت است میتوان x^4 و q را بمنزله دو جمله طرفین بسط $(x^2\pm\sqrt{q})^2$ منظور داشت پس معادله باین صورت درآید

$$ax^4+bx^2+c\equiv a\left[(x^2+\sqrt{q})^2-(2\sqrt{q}-p)x^2\right]$$

$$ax^4+bx^2+c\equiv a\left[(x^2-\sqrt{q})^2-(-2\sqrt{q}-p)x^2\right]$$

وچون $q-\frac{p^2}{4}$ منفی است و $2\sqrt{q}$ بزرگتر است از مقدار مطلق p پس $2\sqrt{q}-p$ محققاً مثبت خواهد بود و از اولین تساوی فوق چنین حاصل شود

$$ax^4+bx^2+c\equiv a\left[(x^2+\sqrt{q})^2-\left(x\sqrt{2\sqrt{q}-p}\right)^2\right]\equiv$$

$$a\left[x^2+x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right]\left[x^2-x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right]$$

و باید دانست که این تساوی فوق محقق و مقرر است وقتیکه معادله دو مجذوری دارای ۴ ریشه حقیقی باشد یعنی $(q>0$ و $p>0$ و $\frac{p^2}{4}-q>0)$ و وسیله جدیدی برای حل معادله دو مجذوری بدست آید چنانکه کافیست که دو معادله درجه دوم ذیل را علاحده حل کنیم

$$x^2+x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}=0 \quad , \quad x^2-x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}=0$$

و از آنجا $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{q}-p}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-2\sqrt{q}-p}$

امثله در تجزیه ترینم دو مجذوری

$$3x^4-7x^2+4\equiv 3(x^2-1)\left(x^2-\frac{4}{3}\right)$$

$$x^4+x^2+1\equiv(x^2+1)^2-x^2\equiv(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$9x^4-3x^2+4\equiv 9\left(x^2+x+\frac{2}{3}\right)\left(x-x+\frac{2}{3}\right)$$

$$x^4+1\equiv(x^2+1)^2-2x^2\equiv(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

۴ـ تغییرات ترینم دو مجذوری

۳۴۶ ترینم دو مجذوری ax^4+bx^2+c معرفت اتصالی از x بازا جمیع مقادیر x از $-\infty$ تا $+\infty$ یعنی بهر مقدار معین و محدودی از x نظیر باشد بیک مقدار معین و محدودی از ترینم فرض میکنیم y_0 مقدار معینی از ترینم نظیر مقدار معین x_0 از x باشد و همچنین y نظیر مقدار دیگر (x_0+h) از x پس دو تساوی ذیل را قرار میدهیم

$$y=a(x_0+h)^4+b(x_0+h)^2+c$$

$$y_0=ax_0^4+bx_0^2+c$$

مقصود از اینکه ترینم دو مجذوری معرفت اتصالی از x بازاء x_0

آنگاه اگر قبلاً فرض کنیم ε عددی باشد مثبت و بی نهایت کوچک میتوان عدد مثبت دیگر α بی نهایت کوچک بدست آورد چنانکه بازاء جمیع مقادیر h که در نامساوی مضاعف $x_0 - \alpha < x_0 + h < x_0 + \alpha$ صدق میکنند این نامساوی نیز محقق باشد $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$ یا اینکه از نامساوی $-\alpha < h < +\alpha$ این نامساوی نتیجه شود $-\varepsilon < y - y_0 < +\varepsilon$

برهان چون دو تساوی فوق را از یکدیگر نقصان کنیم پس از اختصار چنین میشود

$$y - y_0 = h\left[4ax_0^3 + 6ax_0^2h + 4ax_0h^2 + ah^3 + 2bx_0 + bh\right]$$

فرض میکنیم h واقع باشد ما بین ۱- و ۱+ پس مقدار مطلق مجموع $4ax_0^3 + 6ax_0^2h + 4ax_0h^2 + ah^3 + 2bx_0 + bh$ کمتر شود از مجموع مقادیر مطلقهٔ شش عدد ذیل $4ax_0^3$ و $6ax_0^2$ و $4ax_0$ و a و $2bx_0$ و b و چون مجموع این مقادیر مطلقه را به M بنامیم مقدار مطلق $y - y_0$ کوچکتر شود از مقدار مطلق Mh و بعد عدد معلوم ε را آنقدر کوچک فرض میکنیم که $\frac{\varepsilon}{M} < 1$ و چنین قرار میدهیم $\alpha = \frac{\varepsilon}{M}$ و بنابراین بازاء هر مقداری از h محصور ما بین $-\alpha$ و $+\alpha$ و بطریق اولی ما بین ۱- و ۱+ مقدار Mh واقع گردد ما بین $-\frac{\varepsilon}{M} \times M$ و $+\frac{\varepsilon}{M} \times M$ یعنی ما بین $-\varepsilon$ و $+\varepsilon$ و در این صورت چنین

خواهیم داشت $-\varepsilon < y - y_0 < +\varepsilon$ پس از اینجا ثابت میشود که معرّف y اتصالی است

۳۴۷ - جهت تغییرات ترینم $y = ax^4 + bx^2 + c$

برای تعیین جهت تغییرات ترینم دو مجذوری y وقتیکه x از $-\infty$ تا $+\infty$ نمو کند ابتدا ترینم را بصورت کلی ذیل در آوردیم

$$y = ax^4 + bx^2 + c \equiv a\left[x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right] \equiv$$

$$\equiv a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

می بینیم که ترینم y مرکبست از حاصل ضرب a در مجموع دو مقدار که یکی $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ ثابت است و دیگری $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ متغیر پس برای تعیین جهت تغییرات y کافیست که تغییرات $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ را معلوم کنیم و y در جهت $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ یا در جهت مخالف تغییر کند بحسب آنکه a مثبت یا منفی باشد و چون عبارت $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$ نیز در جهت $x^2 + \frac{b}{2a}$ یا در جهت مخالف تغییر میکند بحسب آنکه $x^2 + \frac{b}{2a}$ مثبت یا منفی باشد پس از اینجا دو حالت منظور شود بحسب آنکه $x^2 + \frac{b}{2a}$ بتواند صفر گردد یا اینکه دائماً مثبت باشد یعنی $\frac{b}{2a}$ مثبت یا منفی باشد

اولاً $\frac{b}{2a} > 0$ پس $x^2 + \frac{b}{2a}$ همواره مثبت است و چون x از $-\infty$

تا ۰ ترقی کند $x^2+\frac{b}{2a}$ از $+\infty$ تنزل کند و رسد به $\frac{b}{2a}$ و مجذورش
$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ نیز در همان جهت از $+\infty$ تنزل کرده میرسد به $\frac{b^2}{4a^2}$ و چون
x از ۰ ترقی کند و رسد به $+\infty$ مقدار $x^2+\frac{b}{2a}$ از $\frac{b}{2a}$ ترقی کرده
میرسد به $+\infty$ و آنوقت $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ نیز از $\frac{b^2}{4a^2}$ ترقی کند و رسد به
$+\infty$ پس هرگاه a مثبت باشد y در جهت $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ تغییر خواهد
نمود و بازاء $x=0$ میرسد بمقدار مینیموم c و اگر a منفی باشد y
در جهت مخالف $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ تغییر کند و بازاء $x=0$ میرسد به
مقدار ماکزیموم c خلاصه بحث فوق در جدول ذیل نموده شده است

(↗ علامت ترقی است و ↘ علامت تنزل است)

$\frac{b}{2a}>0$	x	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
$\frac{b}{2a}>0$	$x^2+\frac{b}{2a}$	$+\infty$	↘	$\frac{b}{2a}$	↗	$+\infty$
$\frac{b}{2a}>0$	$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	↘	$\frac{b^2}{4a^2}$	↗	$+\infty$
$\frac{b}{2a}>0$	$a>0$ y	$+\infty$	↘	c مینیموم	↗	$+\infty$
$\frac{b}{2a}>0$	$a<0$ y	$-\infty$	↗	c ماکزیموم	↘	$-\infty$

و باید دانست که هرگاه $b=0$ ترسیم y موافق حالت فوق تغییر کند

ثانیاً $\frac{b}{2a}<0$ در این حالت $x^2+\frac{b}{2a}$ بازاء دو ریشه $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

صفر میشود و بازاء هر مقداری از x واقع ما بین دو ریشه $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ و $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$
منفی است ولیکن بازاء مقادیر x واقع در خارج اندو ریشه مثبت باشد و
چون x از $-\infty$ تا $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ ترقی کند $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)$ و مجذورش
$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ هر دو در یک جهت تغییر کنند و چون x از $-\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ تا $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$
نمو نماید $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ در جهت مخالف $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)$ تغییر خواهد کرد و بالاخره
چون x از $+\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ تا $+\infty$ ترقی کند $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)$ و مجذورش
باز در یک جهت تغییر پذیرند و علاوه بر این چون مقدار $x^2+\frac{b}{2a}$
بازاء $x=0$ دارای یک مینیموم است پس جهت تغییرات ترسیم y
خوب معلوم میگردد

پس از آنچه مقدم شد چنین نتیجه میشود که اگر a مثبت باشد در همان فواصلیکه
$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ صعودی یا نزولی است y نیز صعودی یا نزولی خواهد بود
و اگر a منفی باشد در فواصلیکه $\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$ صعودی یا نزولی باشد
بالعکس y نزولی یا صعودی است و بازاء $x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ معرف y
دارای دو مقدار متساویه مینیموم یا ماکزیموم $\frac{4ac-b^2}{4a}$ میگردد بحسب اگر
a مثبت یا منفی باشد

خلاصه بحث های فوق در جدول ذیل نموده شده است

$\frac{b}{2a}<0$									
	x	$-\infty$	↗	$-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$	↗	0	↗	$+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$	↗ $+\infty$
	$x^2+\frac{b}{2a}$	$+\infty$	↘	0	↘	$\frac{-b}{2a}$	↗	0	↗ $+\infty$
	$\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{b^2}{4a^2}$	↘	0	↗ $+\infty$
	$a>0$ y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	c ماکزیمم	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗ $+\infty$
	$a<0$ y	$-\infty$	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ ماکزیمم	↘	c مینیمم	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ ماکزیمم	↘ $-\infty$

۳۴۸ - نمایش هندسی تغییرات ترینم دو مجذوری

هرگاه دو محور قائم مختصات رسم کنیم و x و y را بمنزلهٔ ابسیس و اُردونهٔ یک نقطه از سطح منظور داریم میتوان مانند جملهٔ $y = ax + b$ و سه جملهٔ درجه دویم $y = ax^2 + bx + c$ تغییرات سه جملهٔ دو مجذوری $y = ax^4 + bx + c$ را بمنحنی نمود در صورتیکه دو حالت عمده منظور آوریم بحسب آنکه $\frac{b}{a}$ مثبت یا منفی باشد و چنین اختیار میکنیم $\overline{OA'} = -\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ و $\overline{OA''} = +\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ وقتیکه $\frac{b}{2a}$ منفی باشد و $\overline{OC} = c$ و $\overline{A'B'} = \overline{A''B''} = \frac{4ac-b^2}{4a}$

اوّلاً فرض میکنیم $a>0$ در اینحالت موافق علامات $\frac{b}{2a}$ و c و $\frac{4ac-b^2}{4a}$ هشت شکل ذیل تشکیل میگردد

ثانیاً $a<0$ بعینه همان اشکال تشکیل گردد ولیکن قرینهٔ آنها نسبت بمحور

$\frac{b}{2a}>0$

$\frac{b}{2a}<0$

$\frac{b}{2a}<0$

xها و در حالت اول $\frac{b}{2a}>0$ منحنی خیلی شبیه شود به نمایش ترینم درجهٔ دویم که قطع مکافی باشد ولیکن در حقیقت قطع مکافی نیست

از روی دستور $y = ax^4 + bx^2 + c$ و شکل منحنی ظاهر است که بازاء دو مقدار متساویه و مختلفة العلامه x فقط یک مقدار برای y بدست آید پس محور yها بمنزلهٔ محور تقارن منحنیات باشد و بنابراین برای معرفت تغییرات y کافیست که فقط x را از ۰ تا $+\infty$ تغییر داد زیرا که آنوقت تغییرات y بازاء

پس منحنی در چهار نقطه محور x ها را قطع کند و ۴ ریشه معادله واقعند ما بین ۱- و ۲

۵ـ معادلات معکوسه

۳۴۹ـ تعریف ـ دو عدد را عکس یکدیگر نامند در صورتیکه حاصل ضربشان مساوی واحد باشد

معادله معکوسه آنستکه ریشه های آن دو بدو عکس یکدیگر باشند یعنی بهر ریشه از معادله نظیر گردد یک ریشه دیگر که عکس آن باشد

حال شروع میکنیم بذکر شرایط لازمه در ضرایب معادله درجه چهارم

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad (1)$$

برای اینکه این معادله معکوسه باشد پس ابتدا معادله تشکیل دهیم که ریشه هایش عکس ریشه های معادله مفروضه باشد چنانکه بهر ریشه x از معادله اول نظیر باشد یک ریشه $y=\frac{1}{x}$ یا $x=\frac{1}{y}$ از معادله ثانی پس از تبدیل x به $\frac{1}{y}$ در معادله اول معادله ثانی ذیل تشکیل میگردد

$$a\frac{1}{y^4}+b\frac{1}{y^3}+c\frac{1}{y^2}+d\frac{1}{y}+e=0$$

و چون طرفین این معادله را در y^4 ضرب کنیم و نسبت بقوای متنازله y مرتب نمائیم چنین شود

$$ey^4+dy^3+cy^2+by+a=0 \quad (2)$$

x از ۰ تا ∞ ـ بدست میآید و علاوه بر این بتوسط همین نمایشات میتوان در حقیقت ریشه های ترینم دو مجذوری را مانند درجه دوم بحث نمود

مثال ۱ـ معلوم کنید چند ریشه از معادله $\frac{x^4}{4}+x^2-3=0$ واقعند ما بین ۰ و ۲

چون منحنی این معادله را $y=\frac{x^4}{4}+x^2-3$ رسم کنیم می بینیم که نقطه مینیمم آن عبارت از C(0, -3) و ابسیس های نقاط A و B فصل مشترک منحنی با محور x ها عبارتند از ریشه معادله پس اگر $x=1$ و $y=-\frac{7}{4}$ و $x=2$ و $y=5$ دو نقطه نظیر در طرفین B واقع باشند بنابراین فقط یک ریشه از معادله واقعست ما بین ۰ و ۲

مثال ۲ـ معلوم کنید چند ریشه از معادلهٔ $x^4-4x^2+1=0$ واقعند ما بین ۱- و ۲

چون منحنی معادله x^4-4x^2+1 را رسم کنیم می بینیم که مختصات دو نقطه C و D عبارتند از $(x=-1 , y=-2)$ و $(y=1 , x=2)$

برای اینکه معادله (۱) و (۲) دارای یک ریشه باشند لازم و کافیست که ضرایب جمل متشابه متناسب باشند یعنی چنین داشته باشیم

$$\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = \frac{c}{c} = \frac{d}{b} = \frac{e}{a}$$

پس اگر c مخالف صفر باشد نسبت $\frac{c}{c}$ مساوی واحد شود و آنوقت شرائط لازمه چنین شوند $a = e$ و $b = d$ بنابراین معادله معکوسه درجه چهارم باید بصورت ذیل باشد

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

یعنی ضرایب جمل متساوی البعد از طرفین باید مرتباً متساوی و متحد العلامه باشند

واما اگر c مساوی صفر باشد چنین خواهیم داشت $\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = \frac{e}{a}$ و چون دو جمله طرفین را اختیار کنیم پس از محو مخارج (چونکه a صفر نیست) این دو تناسب حاصل شود $\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = 1$ یا $\frac{a}{e} = \frac{b}{d} = -1$ تناسب اول راجع است بشرائط حالت اول که c مخالف صفر باشد و تناسب دوم متعلق است بشرائط معادله معکوسه درجه چهارم که باین صورت باشد

$$ax^4 + bx^2 - bx - a = 0$$

یعنی جمله درجه دوم آن مفقود باشد و ضرایب جمل متساوی البعد از طرفین متساوی

و مختلف العلامه باشند

پس بطور کلی شرط لازم و کافی برای اینکه هر معادله کلی $f(x) = 0$ معکوس باشد آنستکه طرف اول آن کثیرالجمله منظم باشد چنانکه ضرایب جمل متساوی البعد از طرفین متساوی باشند و یا متساوی و مختلف العلامه در صورتیکه جمله وسط مفقود باشد مثلاً معادلات ذیل معکوسند $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

$$ax^4 + bx^3 + bx + a = 0 \text{ ، } ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$$

حل هر معادله معکوسه را میتوان راجع کرد بحل معادله درجه دوم و حال میپردازیم بحل معادلات معکوسه درجه سیم و چهارم و پنجم

۳۵۰ — معادله معکوسه درجه سیم — اولاً فرض میکنیم این معادله را $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ چون x را با -1 تبدیل کنیم چنین شود $-a + b - b + a = 0$ پس $x = -1$ یک ریشه این معادله است و طرف اول این معادله قابل قسمت است بر $x + 1$ و آنرا میتوان چنین نوشت

$$(x+1)\left[ax^2 + (b-a)x + a\right] = 0$$

پس ریشه‌های این معادله عبارتند از -1 و دو ریشه معادله معکوسه درجه دوم $ax^2 + (b-a)x + a = 0$

ثانیاً معادله $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$ چون ریشه $x = 1$ قبول میکند

پس میتوان آن را چنین نوشت $(x-1)\left[ax^2+(a+b)x+a\right]=0$
و دو ریشه دیگر آن عبارتند از ریشه های معادله معکوسه درجه دوم ذیل

$$ax^2+(a+b)x+a=0$$

۳۵۱ - معادله معکوسه درجه چهارم — اولاً فرض میکنیم این معادله را $ax^4+bx^3-bx-a=0$ این معادله دو ریشه ۱ و ۱- قبول میکند میتوان آن را باین صورت نوشت $a(x^4-1)+bx(x^2-1)=0$ یا $(x^2-1)\left[ax^2+bx+a\right]=0$ و دو ریشه دیگر آن عبارتند از ریشه های این معادله درجه دوم $ax^2+bx+a=0$

ثانیاً فرض میکنیم این معادله را $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ این معادله کلیه ریشه های ۱ یا ۱- قبول نمیکند پس برای حل آن ابتدا طرفین آن را بر x^2 قسمت میکنیم و حاصل را بصورت ذیل مینویسیم

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

و بعد $x+\frac{1}{x}$ یعنی مجموع دو ریشه متعاکسه معادله مفروضه را مجهول فرض کرده چنین قرار دهیم $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ و چون طرفین را مجذور کنیم حاصل شود

$$y^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2 \quad \text{یا} \quad y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

و چون در معادله (۲) بجای $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$ و $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ مرتباً y^2-2 و y را قرار دهیم معادله محلل $a(y^2-2)+by+c=ay^2+by+c-2a=0$ تشکیل شود و از این معادله دو مقدار y' و y'' برای y بدست آید که هر کدام نظیر باشد بدو مقدار x که از معادله $x+\frac{1}{x}=y$ یا $x^2-yx+1=0$ حاصل شود چون در دستور $x=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2}$ بجای y مرتباً y' و y'' قرار دهیم چهار مقدار حقیقی از برای x استخراج شود که عبارتند از ریشه های معادله

تنبیه — هرگاه مقادیر y حقیقی نباشند معادله معکوسه هیچ ریشه نخواهد داشت و اگر این مقادیر حقیقی باشند چند حالت اتفاق افتد از این قرار اگر مجذور این دو مقدار بزرگتر از ۴ باشند از برای x چهار مقدار حقیقی حاصل شود و اگر مجذور یکی از این دو مقدار بزرگتر از ۴ باشد و دیگری کوچکتر از ۴ فقط دو مقدار حقیقی برای x بدست میآید و بالاخره اگر مجذور این دو مقدار کوچکتر از ۴ باشند هیچ مقدار حقیقی برای x موجود نباشد پس از این بیانات مذکوره چنین استنباط کنیم که شرط لازم و کافی برای اینکه ریشه های معادله معکوسه حقیقی باشند آنستکه معادله محلل و بعد معادله $x^2-yx+1=0$ دارای ریشه باشند و شرط اخیر چنین میشود $(y^2-4)>0$

پس باید ریشه های معادله محلل y بالنفراده در خارج ۲- و ۲+ باشند و در موقع بحث معادله معکوسه باید معلوم کرد که چند ریشه از محلل در خارج ۲- و ۲+ واقعند و آنوقت هر ریشه از محلل نظیر دو ریشه از معادله معکوسه خواهد بود

۳۵۲ - معادله معکوسه درجه پنجم $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$ یا $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx+a=0$ معادله اول همواره ریشه ۱- قبول میکند و معادله دویم دارای ریشه ۱+ است پس میتوان آنها را چنین نوشت

$$(x+1)\left[ax^4+(b-a)x^3+(a-b+c)x^2+(b-a)x+a\right]=0$$

یا

$$(x-1)\left[ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x+a\right]=0$$

و در هر دو صورت عمل راجع شود بحل معادله معکوسه درجه چهارم

۳۵۳ - معادله معکوسه قسم ثانی عبارتست از هر معادله که بصورت ذیل باشد

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

فرض میکنیم x' ریشه این معادله باشد پس تساوی $ax'^4+bx'^3+cx'^2-bx'+a=0$ را میتوان چنین قرار داد

$$a\left(-\frac{1}{x'}\right)^4+b\left(-\frac{1}{x'}\right)^3+c\left(-\frac{1}{x'}\right)^2-b\left(-\frac{1}{x'}\right)+a=0 \quad (خ)$$

یا

$$a+b\frac{1}{x'}+c\frac{1}{x'^2}-b\frac{1}{x'^3}+a\frac{1}{x'^4}=0 \quad (م)$$

و از اینجا ظاهر است که $\frac{1}{x}$ نیز ریشه معادلات و برای حل این معادله ابتدا طرفین آن را بر x^2 قسمت میکنیم و باین صورت می نویسیم

$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0$ و بعد چنین قرار میدهیم

$y=x-\frac{1}{x}$ و از آنجا $y^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$ یا $y^2+2=x^2+\frac{1}{x^2}$

پس معادله معکوسه باین صورت در آید $ay^2+by+c+2a=0$ و چون این معادله را حل کنیم و دو مقدار y را متدرجاً در معادله $y=x-\frac{1}{x}$ قرار دهیم از برای x چهار مقدار بدست میاید

مثال ۱ - این معادله را حل کنید $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

معادله را باین صورت می نویسیم $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$

و بعد چنین قرار میدهیم $y=x+\frac{1}{x}$ و از آنجا $6y^2-35y+50=0$

ریشه های این معادله محلل عبارتند از $y'=\frac{5}{2}$ و $y''=\frac{10}{3}$ و چون این دو مقدار را متدرجاً بجای y در معادله $x^2-yx+1=0$ قرار دهیم چهار مقدار حقیقی ذیل از برای x بدست میاید ۲ و $\frac{1}{2}$ و ۳ و $\frac{1}{3}$

مثال ۲ - حل کنید این معادله را $30x^4-101x^3+138x^2-101x+30=0$

و از آنجا معادله محلل را تشکیل میدهیم $30y^2-101y+78=0$

$\frac{13}{6}=y'$ و $\frac{6}{5}=y''$ و بازاء $\frac{13}{6}$ دو مقدار $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{2}$ از برای x نتیجه میشود ولیکن $\frac{6}{5}$ نظیر هیچ مقداری از x نیست پس معادله مفروضه فقط دارای دو ریشه است

مثال ۳ — حل کنید این معادله را $65x^4-198x^3+274x^2-198x+65=0$

معادله محلل را تشکیل میدهیم $65y^2-198y+144=0$ ریشه های آن عبارتند از $\frac{6}{5}$ و $\frac{24}{13}$ و چون مجذورات این دو ریشه کوچکتر از ۴ پس معادله مفروضه دارای هیچ ریشه نخواهد بود و بهمین طریق معلوم میکنیم که معادله $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ نیز ریشه های حقیقی قبول نمیکند

مثال ۴ — حل کنید این معادله را $5x^4-12x^3+30x^2-12x+5=0$

معادله را باین صورت می نویسیم $5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-12\left(x+\frac{1}{x}\right)+30=0$

و بعد چنین قرار میدهیم $x+\frac{1}{x}=y$ پس معادله محلل چنین میشود $5y^2+12y+20=0$ و چون این معادله ریشه ندارد پس معادله معکوسه نیز ریشه نخواهد داشت

۶ — معادلات دوجمله (بینیم) و سه جمله مخصوص (ترینیم)

۲۵۴ — معادله دوجمله (بینیم) عبارتست از هر معادله که بآن صورت باشد $x^m-A=0$ (۱) که در آن A مقداریست معلوم

مقصود از حل این معادله یافتن اعدادیست مثبت یا منفی یا صفر که چون بجای x قرار دهیم در معادله مفروضه صدق کنند

اولا فرض میکنیم m زوج باشد در این حالت اگر A مثبت باشد در حساب ذکر شده است که میتوان عدد مثبتی یافت که قوه m ام آن مساوی A گردد و چنین عدد ریشه m ام حسابی A است و باین رمز نموده میشود $\sqrt[m]{A}$ و علاوه براین چون ملاحظه کنیم وقتیکه m زوج باشد این تساوی نیز محقق است $(-x)^m=x^m$ پس میتوان یک عدد منفی مانند $-\sqrt[m]{A}$ نیز بدست آورد که در معادله (۱) صدق کند بنابر این وقتیکه m زوج و A مثبت باشد معادله (۱) فقط دارای دو ریشه است $x=\pm\sqrt[m]{A}$ (۲) و اگر وقتیکه m زوج است A منفی باشد معادله مفروضه ریشه نخواهد داشت زیرا که هیچ عدد مثبت یا منفی یافت نشود که قوه زوج آن مساوی یک عدد منفی گردد

ثانیاً فرض میکنیم m فرد باشد و اگر A مثبت باشد میتوان فقط یک عدد مثبت منحصر یافت که قوه m ام آن مساوی A گردد و هیچ عدد منفی یافت نشود پس معادله (۱) فقط دارای یک ریشه منحصر $x=\sqrt[m]{A}$ خوا

بود واگر وقتیکه m فرد است A منفی باشد معادلهٔ مفروضه نتواند ریشه مثبت اختیار کند و امّا اگر چنین قرار دهیم $A=A'$ عدد A' مثبت و $x=-x'$ معادلهٔ $(-x')^m=-A'$ یا $x'^m=A'$ فقط یک ریشه منحصر $x'=\sqrt[m]{A'}$ قبول میکند پس معادله (۱) فقط دارای یک ریشه منحصر منفی $x=-\sqrt[m]{-A}$ خواهد بود

۳۵۵ – **تنبیه** – هرگاه دو جمله باین صورت باشد $Ax^p+Bx^q=0$ در صورتیکه $q<p$ میتوان x^q را عامل مشترک قرار داد و چنین نوشت $x^q\left[Ax^{p-q}+B\right]=0$ و از اینجا ظاهر است که معادلهٔ مفروضه ابتدا ریشه $x=0$ قبول میکند و بعد ریشه‌هائیکه از این معادله حاصل شود $Ax^{p-q}+B=0$ و چون قرار دهیم $p-q=m$ و $-\frac{B}{A}=a$ معادله اخیر باین صورت نموده شود $x^m=a$ بنابراین هر معادله دو جمله پس از استخراج ریشه صفر همواره بصورت کلی ذیل درآید $x^m-a=0$ و این معادله بعینه همان معادلهٔ (۱) است

مثال ۱ – معادله $x^3-1=0$ را حل کنید – این معادله را میتوان باین صورت قرار داد $(x-1)(x^2+x+1)=0$ پس فقط یک ریشه حقیقی قبول کند.

مثال ۲ – این معادله را حل کنید $x^5-1=0$ میتوان آنرا بدو عامل تجزیه کرد باین صورت درآورد $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ از عامل اول حاصل شود $x=1$ ولیکن عامل دوم هیچ ریشه حقیقی قبول نکند پس معادله مفروضه فقط دارای یک ریشه حقیقی است $x=1$ و بهمین طریق معادلات ذیل را حل میکنیم

$x^6-729=0,\ x=\pm3$ $\qquad$ $x^5-32=0,\ x=2$

$x^5+32=0,\ x=-2$ $\qquad$ $x^6-1=0,\ x=\pm1$ $\qquad$ $x^3+27=0,\ x=-3$

و امّا این دو معادله $x^4+2=0$ و $x^4+72=0$ هیچ ریشه حقیقی قبول نکند

۳۵۶ – معادلات سه جمله (ترینم) – معادله سه جمله عبارت از معادله که دارای سه جمله باشد باین صورت $ax^m+bx^n+c=0$ که در آن ضرایب a و b و c مقادیر معلومه‌اند پس هرگاه $m=2n$ حل این معادله مانند معادله دو مجذوری راجع شود بحل معادله درجه دوم و بعد بحل دو معادله دو جمله زیرا که اگر چنین قرار دهیم $y=x^n$ معادله سه جمله $ax^{2n}+bx^n+c=0$ بصورت معادله محلل ذیل درآید $ay^2+by+c=0$ واگر این معادله محلل دارای دو ریشه حقیقی

y' و y'' باشند مقادیری برای x اختیار میکنیم که در دو معادله ذوجملتین صدق کنند $x^n = y'$ و $x^n = y''$ و این مقادیر عبارتند از ریشه های معادله سه جمله مفروض

هرگاه n فرد باشد هر ریشه y' از معادله محلل نظیر شود فقط بیک ریشه ریشه منحصر از معادله مفروضه $x' = \sqrt[n]{y'}$ و اگر n زوج باشد هر ریشه مثبت y' از محلل نظیر گردد بدو ریشه متساویه و مختلفة العلامه $+\sqrt[n]{y'}$ و $-\sqrt[n]{y'}$ هر ریشه منفی از محلل ابداً نظیر هیچ ریشه حقیقی از معادله مفروضه نخواهد بود

۲۵۷ — تنبیه — هرگاه معادله سه جمله باین صورت باشد (۱)

$ax^p + bx^q + cx^r = 0$ چنانکه $p - q = q - r$

فرض میکنیم n تفاضل $q - r$ باشد پس چنین خواهیم داشت

$$p = q + n = 2n + r \quad \text{و} \quad q = n + r$$

و معادله (۱) باین صورت نوشته شود $ax^{2n+r} + bx^{n+r} + cx^r = 0$

و چون x^r را عامل مشترک قرار دهیم چنین حاصل شود چنین خواهیم داشت

$x^r[ax^{2n} + bx^n + c] = 0$ و از اینجا ظاهر است که معادله (۱) ابتدا ریشه $x = 0$ قبول کند و بعد ریشه های معادله ذیل را که بعینه همان معادله (۱) سابق است $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

مثال ۱ — این معادله را حل کنید $x^7 - 3x^4 - 4x = 0$ ابتدا طرفین را بر x قسمت میکنیم تا ریشه $x = 0$ از معادله مفروضه خارج شود و چنین حاصل گردد $x^6 - 3x^3 - 4 = 0$ و بعد چنین قرار میدهیم $x^3 = y$ و از آنجا $y^2 - 3y - 4 = 0$ ریشه های این معادله محلل عبارتند از ۴ و ۱- پس ریشه های معادله مفروضه چنین باشند $\sqrt[3]{4}$ و ۱- و ۰

مثال ۲ — این معادله را حل کنید $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ معادله محلل چنین میشود $y^2 - 7y - 8 = 0$ و از آنجا $y' = -1$ و $y'' = 8$ و این دو ریشه نظیرند با ریشه های معادله مفروضه $\sqrt[3]{-1} = -1$ و $\sqrt[3]{8} = 2$

مثال ۳ — این معادله را حل کنید $1000x^6 - 6119y + 9261 = 0$ معادله محلل چنین میشود $1000y^2 - 6119y + 9261 = 0$ و از آنجا $y' = \frac{27}{8}$ و $y'' = \frac{343}{125}$ پس ریشه های حقیقی معادله مفروضه عبارتند از $\frac{3}{2}$ و $\frac{7}{5}$

مثال ۴ — حل کنید این معادله را $x^8 + 4x^4 - 5 = 0$ معادله محلل چنین میشود

$y^2 + 4y - 5 = 0$ و از آنجا $y = 1$ و $y = -5$ ریشه اول نظیر است بدو ریشه $x = \pm 1$ ولیکن ریشه دویم نظیر هیچ مقداری از x نیست

۷ـ معادلات اصم

۳۵۸- هرگاه در معادله یکی از طرفین یا هر دو طرف شامل رادیکال باشد ابتدا آن معادله را بصورت منطق درآوریم ولیکن نتوان مطمئن شد که معادله جدید معادل معادله مفروضه باشد پس از روی قضایای ذیل میتوان قاعده تبدیل معادله مفروضه را بصورت منطق و شرایط آنرا بدست آورد

۳۵۹- **قضیه ۱**- هرگاه طرفین معادله $A = B$ (۱) را مجذور کنیم معادله جدید $A^2 = B^2$ (۲) شامل جمیع ریشه های معادله اول باشد ولی کلیه معادل آن نگردد

برهان- ابتدا می بینیم وقتیکه معادله (۱) محقق باشد معادله (۲) نیز محقق است زیرا اگر بجای مجهولات مقادیر عددیه شان را قرار دهیم چنانکه مقدار عددیه A مساوی مقدار عددیه B باشد پس مقدار عددیه A^2 و B^2 نیز مساوی خواهند بود ولیکن عکس این حالت قهراً صحیح نیست زیرا که چون معادله (۲) را باین صورت قرار دهیم $A^2 - B^2 = 0$ و $(A-B)(A+B) = 0$ (۳) برای اینکه معادله

(۳) محقق باشد لازم و کافیست که یکی از عوامل آن صفر باشد اگر $A - B$ صفر باشد معادله (۱) محقق است و اگر $A + B$ صفر باشد معادله (۱) محقق نیست ولیکن معادله (۲) محقق است پس دو معادله (۱) و (۲) قهراً معادل نباشند و علاوه براین از روی دلیل فوق ظاهر است که بواسطه مجذور کردن معادله (۱) ریشه های خارجی در آن داخل گردند یعنی ریشه های این معادله $A = -B$ (۴) که حاصل شود از تغییر دادن علامت یکی از طرفین معادله (۱) و در حالت مخصوص وقتیکه معادله (۴) دارای ریشه نباشد معادله (۱) و (۲) معادل گردند

۳۶۰- حل معادله که بصورت $P = \sqrt{Q}$ باشد (P و Q عبارتند از دو کثیرالجمله صحیح و منطق)- از روی قضیه فوق میتوان وقتیکه معادله مفروضه بصورت صحیح و فقط شامل یک رادیکال جذر باشد آنرا بقرار ذیل منطق نمود ابتدا رادیکال را بیک طرف معادله نقل کرده منفرد گذاریم باین صورت $P = \sqrt{Q}$ (۱) و بعد طرفین را مجذور میکنیم تا این معادله منطق حاصل شود $P^2 = Q$ (۲) و این معادله را حل میکنیم ولیکن پس از حل باید تحقیق کرد که اجوبه حاصل شده در معادله (۱) صدق میکنند یا اینکه جزء خارجی هستند یعنی ریشه های این معادله $P = -\sqrt{Q}$ (۳)

فرض میکنیم معادله (۲) را بتوان حل کرد یعنی از درجه اول یا دوم و یا معادله دو مجذوری باشد و $x = \alpha$ یک ریشه حقیقی از این معادله باشد و اگر این ریشه مقدار کثیرالجمله P و Q را صفر کند جواب معادله (۱) خواهد بود و اما اگر α مقدار P و Q را صفر نکند گوئیم که در کثیرالجمله Q چون بجای x مقدار α قرار دهیم حاصل مثبت میگردد یعنی $\sqrt{Q}$ حقیقی است زیرا که چون مقدار حقیقی $x = \alpha$ در معادله (۲) صدق میکند پس مقدار P حقیقی و P^2 مثبت است و Q نیز مثبت خواهد بود و آنوقت $\sqrt{Q}$ حقیقی است

و بنابراین هرگاه نتیجه تبدیل α به x در کثیرالجمله P مثبت باشد α ریشه معادله (۱) خواهد بود زیرا که P تواند مساوی شود مگر به $+\sqrt{Q}$ یا $-\sqrt{Q}$ و اگر بالعکس P منفی باشد α ریشه معادله (۳) است و در معادله (۱) صدق نخواهد نمود یعنی ریشه خارجی است

مثال ۱ - حل کنید این معادله را $2a - x = 3\sqrt{ax - a^2}$ (a عدد مثبت) — چون طرفین این معادله را مجذور کنیم پس از اختصار معادله منتفی ذیل حاصل شود $x^2 - 13ax + 13a^2 = 0$

و از آنجا این دو ریشه نتیجه شود $x' = \frac{a(13+3\sqrt{13})}{2}$ و $x'' = \frac{a(13-3\sqrt{13})}{2}$

و حال باید تحقیق کرد که این ریشه ها در معادله مفروضه مناسب هستند چون بجای x مقدار x' را در کثیرالجمله $2a - x$ قرار دهیم حاصل منفی میشود $\frac{a(-9-3\sqrt{13})}{2}$ پس x' ریشه خارجی است یعنی جواب این معادله است $2a - x = -3\sqrt{ax - a^2}$ و لیکن نتیجه تبدیل x'' به x در کثیرالجمله $2a - x$ مقداریست مثبت $\frac{a(-9+3\sqrt{13})}{2}$ پس فقط x'' ریشه معادله است

مثال ۲ - حل کنید این معادله را $2a + x = -\sqrt{ax + x^2}$ چون طرفین را مجذور کنیم پس از اختصار معادله درجه اول ذیل حاصل شود $3x + 4a = 0$ و از آنجا $x = -\frac{4a}{3}$ و لیکن این مقدار در معادله مفروضه صادق نباید چونکه طرف اول معادله را مثبت میکند پس معادله ریشه ندارد

مثال ۳ - این معادله را حل کنید $x^2 - x + 1 = +\sqrt{6x^2 - 2x + 1}$ پس از تربیع و اختصار چنین شود $x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$ یا $x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$ و از آنجا ریشه های ذیل نتیجه شوند ۰ و ۰ و ۱- و ۳ هر کدام از این ریشه ها در معادله مفروضه صدق کند چونکه بازا هر کدام از آنها مقدار ترنیم $(x^2 - x + 1)$ که ریشه ندارد همواره مثبت است

مثال ۴ - این معادله را حل کنید $x^2 - x + 1 = -\sqrt{6x^2 - 2x + 1}$

چون طرفین را مجذور کنیم پس از اختصار مانند مسئله سابق چنین حاصل شود

$x^2(x^2-2x-3)=0$ و از آنجا ریشه‌های ذیل نتیجه میشود ۰ و ۰ و ۱−

و ۳ ولیکن هیچ کدام از این ریشه‌ها در معادله مفروضه صدق نمیکند چونکه

بازاء هر کدام از آنها طرف اول معادله مثبت میشود پس معادله مفروضه ریشه ندارد

۳۶۱ – حل معادله که بصورت $\sqrt{P}=\pm\sqrt{Q}$ باشد

(P و Q عبارتند از کثیر الجمله‌های صحیح و منطق) – اولاً چون رادیکال‌ها

حقیقی فرض شده پس مستقیماً می‌بینیم که معادله $\sqrt{P}=-\sqrt{Q}$ ریشه قبول نکند

مگر وقتیکه P و Q بازاء یک مقدار حقیقی یک دفعه صفر شوند

ثانیاً چون طرفین معادله $\sqrt{P}=\sqrt{Q}$ (۱) را مجذور کنیم حاصل شود

$P=Q$ (۲) هرگاه $x=\alpha$ یک ریشه حقیقی از معادله (۲) باشد

برای حقیقی بودن رادیکال‌ها وقتیکه $x=\alpha$ مقدار P و Q را صفر نکند

لازم و کافیست که مقدار یکی از این دو کثیر الجمله را مثبت گرداند چونکه بموجب

معادله (۲) که محقق فرض شده مقادیر P و Q بیک علامت میباشند

پس موافق این شرایط α ریشه معادله (۱) هست

۳۶۲ – حل معادله که بصورت $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=\sqrt{R}$ باشد

(P و Q و R عبارتند از کثیر الجمله‌های صحیح و منطق) – وقتیکه معادله اصم

بیشتر از یک رادیکال جذر شامل باشد میتوان بوسطه تربیعات متوالیه پس از اینکه

هر دفعه یک رادیکال را در یک طرف منفرد قرار دهیم معادله اصم را بصورت

معادله منطق درآورد ولیکن ممکن است هر دفعه ریشه‌های خارجی در معادله

داخل کردند پس باید ریشه‌ها را تحقیق نمود

مثلاً فرض میکنیم این معادله را $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=\sqrt{R}$ (۱) چون ابتدا

$\sqrt{R}$ را در یک طرف معادله منفرد سازیم پس از تربیع چنین شود

$P+Q+2\sqrt{PQ}=R$ یا $R-P-Q=2\sqrt{PQ}$ (۲)

و چون معادله جدید (۲) را مجذور کنیم معادله منطق ذیل حاصل شود

$(R-P-Q)^2-4PQ=0$ (۳) پس اگر حل این معادله اخیره

ممکن باشد فرض میکنیم $x=\alpha$ یک ریشه از این معادله است لیکن نتوان

مطمئن شد که α بالضروره در معادله (۱) صدق کند بلکه میتواند ریشه

این دو معادله ذیل باشد $R-P-Q=-2\sqrt{PQ}$ یا

$\sqrt{P}+\sqrt{Q}=-\sqrt{R}$ پس باید ریشه α را تحقیق نمود از این قرار

هرگاه α دو تای از سه کثیر الجمله P و Q و R را صفر کند پس هر سه کثیر الجمله را

صفر کند ریشه معادله (۱) باشد و اگر α هیچ کدام از P و Q و R را
صفر نکند در این صورت ابتدا باید هر کدام از رادیکالهای $\sqrt{P}$ و $\sqrt{Q}$
و $\sqrt{R}$ بازاء $x=\alpha$ مقدار حقیقی اختیار کنند یعنی مقادیر P و Q
و R مثبت باشند و حال گوئیم شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن رادیکالها
آنستکه فقط مقدار یکی از سه کثیر الجمله P و Q و R مثبت باشد زیرا که چون
ملاحظه کنیم موجب معادله (۳) مقدار $(R-P-Q)^2$ بازاء
$x=\alpha$ مثبت است پس حاصل ضرب PQ نیز مثبت باشد و مقادیر
P و Q متحد العلامه اند پس برای اینکه این دو مقدار مثبت
باشند لازم و کافی است که یکی از آنها مثلاً P مثبت باشد و اگر این
شرط محقق گردد چون $\sqrt{P}$ و $\sqrt{Q}$ حقیقی اند پس $\sqrt{P}+\sqrt{Q}$
وهمچنین $\sqrt{P}-\sqrt{Q}$ مقادیر حقیقی اختیار کنند و مقدار $\sqrt{R}$ نیز حقیقی
خواهد بود و بنا بر این شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن رادیکالها آنستکه
یکی از سه کثیر الجمله P و Q و R بازاء $x=\alpha$ مقدار مثبت
اختیار کند

فرض میکنیم این شرط فوق محقق باشد باز α ریشه معادله (۱) نگردد پس یکی

تحقیق آن مقدار کثیر الجمله $R-P-Q$ را بازاء $x=\alpha$ تشکیل دهیم اگر این مقدار
مثبت باشد α ریشه معادله (۲) خواهد بود والا α ریشه خارجی است
وعلاوه بر این در همین حالت اگر $R-P-Q$ مقدار مثبت اختیار کند α ریشه
معادله (۱) خواهد بود زیرا که نتواند ریشه معادله دیگر باشد مگر
$-\sqrt{R}=\sqrt{P}+\sqrt{Q}$ ولیکن این معادله محال است چونکه مقادیر طرفین
حقیقی و مختلف العلامه اند

و بهمین طور بسهولت معلوم میشود که اگر یک ریشه حقیقی از معادله (۳) فقط
یکی از کثیر الجمله های P و Q و R را صفر کند برای حقیقی بودن رادیکالها
لازم و کافیست که یکی از دو کثیر الجمله دیگر مقدار مثبت اختیار کند

۳۶۳ - تنبیه - هرگاه معادله (۳) را بسط دهیم حاصل شود

$$P^2+Q^2+R^2-2P.Q-2P.R-2QR=0 \quad (4)$$

و بآسانی میتوان تحقیق کرد که این معادله شامل اوبه چهار معادله ذیل است

$$\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0 \quad \text{و} \quad \sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}=0$$

$$\sqrt{P}-\sqrt{Q}+\sqrt{R}=0 \quad \text{و} \quad \sqrt{P}-\sqrt{Q}-\sqrt{R}=0$$

و اگر هر کدام از این معادلات فوق را بصورت منطق تبدیل کنیم و بسط

دهیم بصورت معادلهٔ (۴) درآید پس باید همواره ریشه‌های حاصل شده را تحقیق نمود

مثال ۱ – این معادله را حل کنید $\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^2-7x+13}=1$

ابتدا می‌بینیم که ترینوم $x^2-7x+13$ چون دارای ریشه نیست پس بازاء

هر مقدار حقیقی از x که در معادلهٔ (۱) صدق کند مقادیر رادیکالها حقیقی

باشند و چون یکی از رادیکالها مثلاً رادیکال اول را در یکطرف معادله

منفرد گذاریم حاصل شود $\sqrt{x^2-5x+4}=1-\sqrt{x^2-7x+13}$ (۲)

و پس از تربیع و اختصار چنین شود $x-5=-\sqrt{x^2-7x+13}$ (۳)

و چون مجدداً مجذور کنیم حاصل شود $x=4$ پس این معادله فقط دارای

یک ریشه است که در معادلهٔ (۳) صدق کند چونکه مقدار $x-5$ بازاء

$x=4$ منفی است و همین ریشه در معادلهٔ (۲) نیز صادق آید چونکه بازاء

آن هر دو طرف معادله صفر میشود

مثال ۲ – حل کنید این معادله را $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13}$ (۱)

پس از تربیع حاصل شود $5x+9=2\sqrt{(2x+3)(5x+1)}$ (۲)

و چون مجدداً مجذور کنیم نتیجه شود $15x^2-22x-69=0$ (۳)

ریشه‌های این معادلهٔ اخیره عبارتند از ۳ و $-\frac{23}{15}$ و بازاء $x=3$ مقدار

رادیکالها حقیقی‌اند و کثیرالجملهٔ $5x+9$ طرف اول معادلهٔ (۲) نیز مثبت است

پس این ریشه در معادلهٔ (۱) که طرفین آن متحدالعلامه‌اند صدق کند و امّا بازاء

ریشهٔ منفی $-\frac{23}{15}$ مقدار $2x+3$ منفی است پس این ریشه در معادلهٔ (۱) صادق نباشد

مثال ۳ – حل کنید این معادله را $\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{x^2-9}$ (۱)

پس از تربیع طرفین حاصل شود $x^2+15=+2\sqrt{x^4+2x^2+9}$ (۲)

و چون مجدداً مجذور کنیم معادلهٔ دو مجذوری نتیجه شود $3x^4-22x^2-189=0$ (۳)

و این معادلهٔ اخیره فقط دارای دو ریشهٔ حقیقی است $x=\pm\sqrt{\frac{11+4\sqrt{43}}{3}}$ و این

دو ریشه مختلف‌العلامه‌اند و مقدار x^2-9 بازاء یکی از این دو ریشه مثبت است

پس مقادیر رادیکالها حقیقی باشند ولیکن فقط بازاء ریشهٔ مثبت طرف اول

معادلهٔ (۱) مثبت باشد پس ریشهٔ قابل قبول منحصر است به $x=+\sqrt{\frac{11+4\sqrt{43}}{3}}$

۴۶۲ – تنبیه – هرگاه معادلهٔ اصم دارای سه رادیکال جذر و یک

جزو منطق یا بیش از سه رادیکال باشد بهمین طریق مذکور شرایط حقیقی بودن

رادیکالها را بحث میکنیم و اجوبهٔ معادلهٔ منطقه را که بدست آید متدرجاً تحقیق

میکنیم کلیه سرعت عمل تبدیل معادلهٔ اصم بصورت منطق منوط است بطرز

محاسبه که اختیار شود

۳۶۵ — قضیهٔ ۲ — هرگاه فقط اجوبهٔ حقیقیهٔ معادلهٔ $A=B$ (۱) را اعتبار کنیم معادلهٔ $A^m=B^m$ (۲) معادل شود با معادلهٔ (۱) وقتیکه m فرد باشد و معادل آن نگردد وقتیکه m زوج باشد و در این حالت بعلاوه اجوبهٔ معادلهٔ

(۳) $A=-B$ را نیز قبول کند

ابتدا هر ریشه از معادلهٔ (۱) ریشهٔ معادلهٔ (۲) است و حال باید دید که بالعکس هر ریشه از معادلهٔ (۲) در معادلهٔ (۱) صدق میکند

اگر m فرد باشد هرکدام از عبارات A^m و B^m فقط یک ریشهٔ حقیقی m ام متحد العلامه با هرکدام از A و B قبول کنند و اگر بفرض معادلهٔ (۲) محقق باشد A^m و B^m مقادیر عددیهٔ متساویه اختیار کنند و ریشهٔ m ام آنها نیز متساوی میگردند و معادلهٔ (۱) محقق باشد

و هرگاه m زوج باشد هرکدام از عبارات A^m و B^m دو ریشهٔ m ام حقیقی متساوی و مختلف العلامه $\pm A$ و $\pm B$ اختیار کنند و اگر معادلهٔ (۲) محقق باشد A^m و B^m دارای مقادیر عددیهٔ متساویه باشند و اما بحسب آنکه مقادیر عددیهٔ A و B متحد العلامه یا مختلف العلامه باشند در اینصورت معادلهٔ (۱) یا معادلهٔ (۳) محقق گردد و در این حالت عمومیت معادلهٔ (۲)

بیشتر است از معادلهٔ (۱)

۳۶۶ — تنبیه ۱ — هرگاه ریشه‌های موهومی را در بحث داخل کنیم بیانات مذکورهٔ فوق صحیح نباشند چونکه معادلهٔ (۲) معادل معادلهٔ (۱) نگردد بلکه علاوه بر اجوبهٔ معادلهٔ (۱) شامل اجوبهٔ معادلهٔ ذیل نیز خواهد بود

$$A^{m-1}+A^{m-2}B+A^{m-3}B^2+\cdots+B^{m-1}=0 \qquad (۴)$$

زیرا که چون این تساوی را قرار دهیم

$$A^m-B^m\equiv(A-B)\{A^{m-1}+A^{m-2}B+\cdots+B^{m-1}\}$$

می بینیم برای اینکه A^m-B^m صفر باشد یعنی معادلهٔ (۲) محقق گردد لازم و کافیست که یکی از عوامل حاصل ضرب صفر باشد اگر چنانچه عامل اول صفر باشد معادلهٔ (۱) محقق است و اگر عامل دویم صفر باشد معادلهٔ (۴) محقق خواهد بود پس اگر جمیع ریشه‌های حقیقی یا موهومی را اعتبار کنیم معادلهٔ (۱) و (۲) متعادل نگردند

۳۶۷ — تنبیه ۲ — مورد استعمال قضیهٔ ۲ برای منطق کردن معادلهٔ اصمی است که شامل یک یا چند رادیکال باشد چنانکه نمایندهٔ ریشه یکی از آنها اقلاً غیر از ۲ باشد

مثال ۱ – این معادله را حل کنید $\sqrt[3]{x^3-2}=x-1$

چون طرفین را مکعب کنیم ریشهٔ حقیقی در معادله داخل نگردد و حاصل شود

$(x-1)^3=x^3-2$ و پس از اختصار $3x^2-3x-1=0$ و از آنجا $x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}$

و هر دو ریشه در معادلهٔ مفروضه صدق کنند

مثال ۲ – این معادله را حل کنید $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-3}=0$ (۱)

چون رادیکال اخیر را منفرد قرار دهیم $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}=-\sqrt[3]{x-3}$ (۲)

و نظر باتحاد $(a+b)^3\equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$

چون معادلهٔ (۲) را مکعب کنیم حاصل شود

$$x+x-1+3\sqrt[3]{x(x-1)}\left[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}\right]=-x+3$$

و بموجب معادلهٔ (۲) حاصل شود $3x-4=3\sqrt[3]{x(x-1)(x-3)}$

و این معادله معادل است با معادلهٔ (۱) و چون مجدداً مکعب کنیم پس از اختصار

معادلهٔ منطق حاصل شود $63x-64=0$ و از آنجا $x=\frac{64}{63}$

و این مقدار در معادلهٔ (۱) صدق میکند

مثال ۳ – حل کنید این معادله را $\sqrt[4]{x^4-4x^3+4}=x-1$ (۱)

چون طرفین را بقوهٔ چهار رسانیم پس از اختصار چنین حاصل شود

(۲) $6x^3-19x-3=0$ این معادلهٔ جدیده معادل معادلهٔ (۱) نیست در ریشه‌ها

حقیقی اند و علاوه براین بازاء هرکدام از این ریشه‌های حقیقی مقدار رادیکال

حقیقی است چونکه مقدار $(x-1)$ مساوی است با رادیکال که بعلامت +

یا – باشد و حال باید دید که بازاء چند عدد از این ریشه‌ها مقدار $(x-1)$

مثبت میشود ریشهٔ منفی مناسب نیست و اما بازاء ریشهٔ مثبت مقدار $(x-1)$

مثبت است زیرا که چون در زیر طرف اول معادلهٔ (۲) عدد (۱) قرار دهیم

حاصل منفی شود پس عدد (۱) واقعست مابین دو ریشه این معادله و ریشه

$x=\frac{2+\sqrt{22}}{6}$ در معادلهٔ (۱) صدق کند

امثلهٔ متعلقه بفصل پانزدهم

۱ – معادلات دو مجذوری ذیل را حل کنید

$x^4-5x^2+4=0$ و $4x^4-17x^2+4=0$

$x^4-8x^2-9=0$ و $a^2b^2x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$

$(3x^2+5x-1)^2-28(3x^2+5x)+175=0$ و $5x^4-8x^2-3=0$

$c^4x^4+(a^2c^2-b^2c^2)x^2-a^2b^2=0$ و $\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2}{x^2-b^2}=4$

۲ – معادلات ذیل را بعوامل درجهٔ دویم تجزیه کنید

x^4-x^2+4 و x^4+2x^2-1 و x^4-6x^2+1

$3x^4-5x^2+1$ ، x^4-2x^2+9 ، x^4+34x^2+223

۳ـ بحسب مقادیر λ در معادلات ذیل بحث کنید

$(\lambda-2)x^4+2(\lambda-3)x^2+\lambda=0$ و $x^4-2(\lambda+5)x^2+\lambda^2-7=0$

$x^4-(3\lambda+4)x^2+(\lambda+1)^2=0$ و $(\lambda-2)x^4+4(\lambda+3)x^2+\lambda-1=0$

۴ـ مواضع اعداد ۳ و ۲ و ۵ و ۱۰ را نسبت بریشه های معادلات ذیل معلوم کنید

$2x^4-5x^2+1=0$ و $3x^4-5x^2+1=0$ و $x^4+6x^2-7=0$

۵ـ تغییرات ترنیم های ذیل را تعیین کنید و منحنیات آنها را رسم کنید

$-x^4+2x^2-5$ و x^4+x^2-1 و x^4+3x^2+2

$-x^4+4x^2-1$ و $-x^4+4x^2$ و x^4-6x^2+1

۶ـ در ترنیم های ذیل معلوم کنید مابین چه حدود باید x را تغییر داد تا مقدار y مثبت یا منفی باشد و تغییرات y را بنمائید و منحنی آنرا رسم کنید

$y=x^4-43x^2+225$ و $y=x^4-16x^2+63$

$y=56-5x^2-x^4$ و $y=x^4-12x^2+32$

۷ـ عبارات ذیل را تبدیل کنید $\sqrt{6\pm2\sqrt{5}}$ و $\sqrt{8\pm2\sqrt{7}}$

فصل شانزدهم

دستگاه معادلات چند مجهولی درجه دوم

۱ـ دستگاه مرکب از یک معادله درجه دوم و یک یا چند معادله درجه اول

۳۶۸ ـ ابتدا دو معادله دو مجهولی فرض میکنیم که یکی از درجه دوم باشد و دیگری از درجه اول

هر معادله دو مجهولی درجه دوم را پس از اختصار میتوان همواره بصورت کلی ذیل آورد

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

که در آن a و b و c و d و e و f مقادیر معلومه اند

و همچنین هر معادله دو مجهولی درجه اول نیز پس از اختصار بصورت کلی ذیل نوشته میشود

$y=mx+n$ (۲) برای حل این دستگاه معادلات (۱) و (۲) قاعده تبدیل را که در هر دستگاهی قابل اجراست بکار میبریم مشروط بر اینکه یکی از معادلات آن دستگاه را بتوان نسبت بیکی از مجهولات حل نمود پس اگر در معادله (۱) بجای y عبارت $mx+n$ را که از معادله (۲) حاصل شده قرار دهیم معادله ذیل تشکیل میشود

$$(a+bm+cm^2)x^2+(bn+2cmn+d+em)x+(cn^2+en+f)=0 \qquad (3)$$

این معادله (۳) بانضمام معادله (۲) دستگاه معادل بدستگاه مفروض تشکیل دهد و چون معادله (۳) بطور کلی از درجه دویم است از آنجا دو مقدار x' و x'' برای x حاصل میشود و بعد از معادله (۲) نیز دو مقدار ذیل از برای y بدست میآید

$$y'' = mx'' + n \quad , \quad y' = mx' + n$$

هرگاه فرض کنیم در معادله (۳) ضریب x^2 یعنی $a + bm + cm^2$ صفر باشد ولیکن ضریب جمله x مخالف صفر در اینصورت معادله (۳) منجر شود بدرجه اول و دارای یک جواب x باشد و این مقدار x نظیر گردد با مقدار y که از معادله $y = mx + n$ حاصل شود لهذا دستگاه مفروض فقط یک جواب قبول کند

و حال اگر فرض کنیم ضریب جمله x^2 و x هر دو یکمرتبه صفر باشند و اما جمله معلوم مخالف صفر در اینصورت معادله (۳) هیچ ریشه قبول نکند پس دستگاه مفروض نیز جواب نخواهد داشت و بالاخره اگر ضریب جمله x^2 و x و مقدار جمله معلوم هر سه یکمرتبه صفر باشند معادله (۳) مبدل گردد بصورت اتحاد و هر مقدار غیر مشخص از x در آن معادله صدق میکند بنابراین دستگاه مفروض دارای جوابهای لاتناهی خواهد بود و بازاء هر مقدار غیر مشخص x از x مقدار نظیرش از y نیز چنین میشود

$y_1 = mx_1 + n$ و بسهولت میتوان تحقیق کرد که فقط در اینحالت کثیر الجمله طرف اول معادله (۱) قابل قسمت است بر $y - mx - n$ هرچه باشد مقدار اختیاری x که بمنزله ضریب متغیر است

مثال ۱ — فرض میکنیم مقصود حل این دو معادله ذیل باشد

$$8x - y = 3 \quad , \quad x^2 + 4xy - 5y^2 + 12x + 92 = 0$$

معادله ثانی را باینصورت مینویسیم $y = 8x - 3$ و چون در معادله اول بجای y مقدارش $8x - 3$ را قرار دهیم پس از اختصار چنین حاصل میشود $287x^2 - 240x - 47 = 0$ و از این معادله درجه دویم دو مقدار ذیل برای x بدست آید

$$x = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 + 287 \cdot 47}}{287} = \frac{120 \pm 167}{287}$$

و از آنجا $x' = 1$ و $x'' = -\frac{47}{287}$ و بعد مقادیر y نیز چنین شوند

$$y'' = 8x'' - 3 = -\frac{1237}{287} \quad , \quad y' = 8x' - 3 = 5$$

مثال ۲ — حل کنید دستگاه دو معادله ذیل را

$$y = 3x + 1 \quad , \quad 12x^2 - 7xy + y^2 + 2x - y + 3 = 0$$

چون در معادله اول بجای y مقدار $3x + 1$ را قرار دهیم این معادله

درجهٔ اول حاصل شود $-2x+3=0$ – لهذا دستگاه مفروض فقط دارای یک جواب باشد $x=\frac{3}{2}$ و $y=\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}$

مثال ۳ — حل کنید این دو معادله را

$$3x^2+4xy+y^2+13x+5y+4=0 \quad \text{و} \quad y+3x+1=0$$

چون در معادلهٔ اول بجای y مقدارش $-3x-1$ را قرار دهیم این معادله نتیجه میشود $0x^2+0x+0=0$ و واضحست که هر مقدار غیر مشخصی که بجای x در این معادله قرار دهیم صدق میکند و بآسانی میتوان تحقیق کرد که عضو اول معادلهٔ اول قابل قسمت است بر $y+3x+1$ و آن را میتوان باین صورت نوشت $(y+3x+1)(y+x+4)$ و از اینجا ظاهر است که دستگاه مفروض چون معادل است فقط با معادلهٔ منحصر $y+3x+1=0$ پس بینهایت جواب بود

۳۶۹ — هر دستگاه مرکب از سه معادلهٔ سه مجهولی را که یکی از درجهٔ دوم باشد و دو تای دیگر از درجهٔ اول میتوان بطریق مذکور حل نمود مثلاً مجهولات را x و y و z فرض میکنیم و از دو معادلهٔ درجهٔ اول دو مجهول y و z را استخراج میکنیم $y=mx+n$ و $z=px+q$ و چون در معادلهٔ درجهٔ دوم بجای y و z مقادیر حاصلهٔ فوق را قرار دهیم یک

معادلهٔ درجهٔ دوم بحسب x حاصل شود $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ لهذا دستگاه مفروض را میتوان تبدیل کرد بدستگاه معادل ذیل

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \text{و} \quad y=mx+n \quad \text{و} \quad z=px+q$$

از معادلهٔ اول دو مقدار x' و x'' برای x نتیجه میشود و چون این دو مقدار را متدرجاً در دو معادلهٔ دیگر قرار دهیم برای y و z نیز دو مقدار ذیل حاصل میگردد $y'=mx'+n$ و $z'=px'+q$ و $y''=mx''+n$ و $z''=px''+q$ پس دستگاه مفروض دارای دو جواب باشد بالاخره بهمین طریق مذکور میتوان هر دستگاه مرکب از m معادله و m مجهولی را که یکی از آنها درجهٔ دوم و $(m-1)$ معادلهٔ دیگر از درجهٔ اول باشد حل نمود

مثال ۱ — حل کنید این دستگاه سه معادلهٔ ذیل را

$$2x^2+y^2-4xz-2yz+3x-4y-13=0$$

$$7x-3y+z+6=0 \quad \text{و} \quad 5x-y-z-2=0$$

از دو معادلهٔ درجهٔ اول چنین حاصل میشود $y=3x+1$ و $z=2x-3$

و چون این دو مقدار را در معادلهٔ درجهٔ دوم نقل کنیم معادلهٔ درجهٔ دوم ذیل بحسب

$2x^2+(3x+1)^2-4x(2x-2)-$ x تشکیل میشود

$-2(3x+1)(2x-3)+3x-4(3x+1)-13=0$

و پس از اختصار چنین میشود

$9x^2-23x+10=0$ ریشه های این معادله عبارتند از $x'=\frac{5}{9}$

و $x''=2$ و با زاء این دو مقدار x دو مقدار از برای y و z بدست آید

$y'=\frac{8}{3}$ و $z'=-\frac{17}{9}$ و $y''=7$ و $z''=1$ پس دستگاه

مفروض دارای دو ریشه است

مثال ۲ — دستگاه معادلات ذیل را حل کنید

$$x^2+y^2+z^2+u^2-2yz-3uv+x-y+3u-2=0$$

$$x+2y-z=1 \quad , \quad 2y+z-u=1 \quad , \quad x+u=4$$

و $y-z+2u-v=3$ از معادلات درجهٔ اول چنین استخراج میشود

$$y=\frac{3-x}{2} \quad , \quad z=2 \quad , \quad u=4-x \quad , \quad v=\frac{9-5x}{2}$$

و چون بجای y و z و u و v مقادیرشان را در معادلهٔ درجهٔ دوم قرار دهیم

معادلهٔ درجهٔ دوم بحسب x تشکیل میگردد $7x^2-46x+39=0$

و ریشه های این معادله عبارتند از $x'=1$ و $x''=\frac{39}{7}$ لهذا دستگاه مفروض

دارای دو جواب باشد از قرار $x'=1$ و $y'=1$ و $z'=2$ و $u'=3$

و $v'=2$ و $x''=\frac{39}{7}$ و $y''=-\frac{9}{7}$ و $z''=2$ و $u''=-\frac{11}{7}$ و $v''=-\frac{66}{7}$

۲ — دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم

۳۷۰ — حل هر دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم بطور کلی راجع شود

به یک معادلهٔ درجهٔ چهارم یک مجهولی که موافق قواعد مقدماتیه نمیتوان حل نمود

مگر در بعضی حالات مخصوصه

مثلاً فرض میکنیم دو معادلهٔ دو مجهولی درجهٔ دوم ذیل را

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \quad (1)$$

$$a'x+b'xy+c'y^2+d'x+e'y+f'=0 \quad (2)$$

اگر ضرایب جملهٔ y^2 در هر دو معادله مخالف صفر باشد میتوان y^2 را از هر دو معادله

حذف نمود بدین طریق که معادلهٔ اول را در c' و معادلهٔ ثانی را در c ضرب میکنیم

و بعد آنها را عضو بعضو از یکدیگر نقصان میکنیم تا این معادلهٔ ذیل نتیجه شود

$$(ac'-ca')x^2+(bc'-cb')xy+(dc'-cd')x+$$

$$+(ec'-ce')y+(fc'-cf')=0 \quad (3)$$

این معادلهٔ (۳) با هر یک از دو معادلهٔ مفروضهٔ (۱) و (۲) دستگاهی معادل با

دستگاه مفروض تشکیل دهد و محض اختصار کتابت هر کدام از ضرایب معادله (۳) را

بیک حرف بنمائیم تا آن معادله بصورت ذیل درآید

$mx^2 + nxy + px + qy + r = 0$ (۴) در حالت مخصوص وقتیکه

n و q هر دو مرتبه صفر باشند معادله (۴) را نسبت به x حل میکنیم

و بعد مقادیر x را در یکی از دو معادله مفروضه (۱) و (۲) نقل میکنیم تا دو

مقدار y نیز بدست آید ولیکن در حالت کلی وقتیکه n و q هر دو مخالف صفر

باشند معادله (۴) را میتوان باینصورت نوشت

$y = -\frac{mx^2 + px + r}{nx + q}$ (۵) و چون در معادله (۱) بجای y مقدارش

$-\frac{mx^2 + px + r}{nx + q}$ را قرار دهیم معادله ذیل تشکیل میگردد

$$ax^2 - bx\frac{mx^2 + px + r}{nx + q} + c\left(\frac{mx^2 + px + r}{nx + q}\right)^2 +$$

$$+ dx - e\frac{mx^2 + px + r}{nx + q} + f = 0 \quad (۶)$$

و این معادله (۶) با انضمام معادله (۵) دستگاه معادل با دو معادله (۱) و (۲)

تشکیل دهد و چون مخارج آن را محو کنیم پس از اختصارات لازمه بصورت یک معادله

یک مجهولی درجه چهارم کامل درآید

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \quad (۷)$$

و این معادله درجه چهارم را بکلیه نمیتوان حل نمود مگر در بعضی حالات مخصوصه مثلا

وقتیکه دو مجذوری یا معکوسه یا منجر بدرجه دوم باشد

مثال — حل کنید دو معادله دو مجهولی درجه دوم ذیل را

$$(۱) \quad x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0$$

$$(۲) \quad 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0$$

پس از حذف y^2 این معادله حاصل میشود

$x^2 - 10xy + 6x - 18y + 21 = 0$ (۳) و این معادله را

باینصورت بنویسیم $y = \frac{x^2 + 6x + 21}{10x + 18}$ و چون در معادله

(۱) بجای y مقدارش $\frac{x^2 + 6x + 21}{10x + 18}$ را قرار دهیم پس از

اختصار معادله دو مجذوری ذیل تشکیل گردد

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ (۴) و این معادله با انضمام معادله (۳) معادل است

با دستگاه مفروض و ریشه هایش عبارتند از ۱ و ۳ و ۳- و ۱- و چون

این مقادیر را متدرجاً در معادله (۴) بجای x قرار دهیم مقادیر y

چنین شوند ۱ و ۲ و ۱ و ۱- پس دستگاه مفروض دارای چهار جواب است

۳۷۱ — ممکن است اتفاق افتد که طرف اول معادله (۴) مرکب باشد از

دو عامل درجهٔ اول یعنی وقتیکه $mx^2 + px + sx + r$ قابل قسمت باشد

بر $mx + q$ در اینصورت معادلهٔ مفروضه را میتوان چنین نوشت

$(mx+q)(y+sx+t)=0$ و آنوقت دستگاه معادلات (۱)

و (۴) را میتوان تبدیل نمود بدو دستگاه که هر کدام مرکب باشد از یک معادلهٔ

درجهٔ دویم و یک معادلهٔ درجهٔ اول که میتوان حل نمود مخصوصاً بنظر میآوریم آن

حالتی را که یکی از معادلات مفروضه نسبت به x و y متحد الدرجه باشد مثلاً

فرض میکنیم معادلهٔ (۱) منجر شود باین صورت $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$

چون جمیع جمل را بر y^2 قسمت کنیم باینصورت در آید $a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\frac{x}{y} + c = 0$

و چون این معادله را نسبت به $\frac{x}{y}$ حل کنیم این دو مقدار نتیجه شوند $\frac{x}{y} = m$

و $\frac{x}{y} = m'$ یا $x = my$ و $x = m'y$ و چون هر کدام از این

دو معادلهٔ درجهٔ اول را بتدریج با معادلهٔ مفروضهٔ (۲) ترکیب کنیم دو دستگاه

تشکیل شود هر یک مرکب از یک معادلهٔ درجهٔ اول و یک معادلهٔ درجهٔ دوم مثلاً

فرض میکنیم این دستگاه ذیل را

$$3x^2 + 13xy - 10y^2 = 0 \qquad (1)$$

$$2x^2 + 3xy - y^2 + x + 5y - 34 = 0 \qquad (2)$$

از معادلهٔ (۱) چنین حاصل میشود $x = -5y$ و $x = \frac{2}{3}y$ و چون معادلهٔ

$x = \frac{2}{3}y$ را با معادله (۲) ترکیب کنیم دو جواب بدست آید $x = 2$

و $y = 3$ و $x = -4$ و $y = -6$ و همچنین از ترکیب $x = -5y$

با معادله (۲) این دو جواب نتیجه شود $x = 5$ و $y = -1$ و $x = -5$ و

$y = 1$ و بالاخره هرگاه دو معادلهٔ مفروضه دارای جمل درجهٔ اول نباشند

باز موافق قاعدهٔ کلی عمل منجر شود بمعادلهٔ دو مجذوری و اما این حالت را میتوان

تبدیل نمود بحالت مذکورهٔ فوق

۳ــ شرط اینکه دو معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دویم دارای یک ریشهٔ مشترک باشند

۳۷۲ ــ فرض میکنیم این دو معادلهٔ ذیل را

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ a'x^2 + b'x + c' &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

شرط لازم و کافی برای اینکه این دو معادله اقلاً دارای یک ریشهٔ مشترک باشند اینست

$$R = (ac'-ca')^2 - (ab'-ba')(bc'-cb') = 0$$

ابتدا فرض میکنیم $a \neq 0$ طرفین معادلهٔ اول را در a' و معادلهٔ ثانی را

در a ضرب میکنیم و عضو بعضو از یکدیگر میکاهیم پس دستگاه ذیل معادل دستگاه مفروض

$$(2) \quad \begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ (ab'-ba')x + ac' - ca' = 0 \end{cases}$$

اولاً اگر $ab' - ba' \neq 0$ معادلهٔ ثانی دارای یک جواب منحصر

$x = -\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$ خواهد بود پس برای اینکه دستگاه (۲) و (۱) هر دو
دارای یک جواب مشترک باشند لازم و کافی است که این مقدار x ریشه
معادله اول هم باشد یعنی

$$a\left(\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)^2 - b\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} + c = 0$$

و این تساوی پس از محو مخرج چنین میشود

$$a(ac'-ca')^2 - b(ac'-ca')(ab'-ba') + c(ab'-ba')^2 = 0$$

و چون دو جمله اخیر مقدار $(ab'-ba')$ را عامل مشترک قرار دهیم و طرفین را
بر a قسمت کنیم حاصل چنین میشود

$$R = (ac'-ca')^2 - (ab'-ba')(bc'-cb') = 0$$

و این مقدار R را نتیجه دو معادله درجه دوم مفروضه نامند و آنرا میتوان
بصورت ذیل درآورد که غالباً خیلی مفید است

$$4R = (2ac'-2ca'-bb')^2 - (b^2-4ac)(b'^2-4a'c') = 0$$

ثانیاً فرض میکنیم $ab'-ba'=0$ پس اگر $ac'-ca' \neq 0$ معادله ثانی
دستگاه (۲) جواب نخواهد داشت و اگر $ac'-ca'=0$ معادله ثانی منجر
شود بصورت اتحاد و در اینحالت ریشه های معادله دستگاه (۲) صدق کنند

و آنوقت دستگاه (۱) مرکب باشند از دو معادله که دارای یک ریشه باشند
و علاوه بر این ضرایب این دو معادله متناسبند چونکه از دو رابطه
$ab'-ba'=0 ,\ ac'-ca'=0$ این تناسب نتیجه شود
$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ و اگر $a=0$ معادله اول از درجه اول
خواهد بود و ریشه اش $-\frac{c}{b}$ و اگر این ریشه در معادله ثانی صدق کند پس
$a'\frac{c^2}{b^2} - b'\frac{c}{b} + c' = 0$ و یا چون b مخالف صفر است پس

$$a'c^2 - bb'c + c'b^2 = 0$$

تنبیه — رابطه $R=0$ در حالت اول مبرهن شد و لیکن معلوم است
که اگر فرض کنیم $ab'-ba'=0$ در اینصورت R منجر شود به
$ac'-ca'=0$ که نظیر است بحالت ثانی و اگر در همین حالت ثانی
فرض کنیم $a=0$ پس R چنین میشود $c^2a'^2 + b^2a'c' - bb'a'c = 0$
یا $a'(a'c^2 - bb'c + c'b^2) = 0$ همان رابطه ایست که مستقیماً بدست آمده
درصورتیکه فرض کنیم $a' \neq 0$

خلاصه شرط لازم و کافی برای اینکه دو معادله که یکی اقلاً از درجه دوم است
دارای یک ریشه مشترک باشند آنست که نتیجه شان صفر باشد و اگر ضرایب

متناسب باشند هر دو معادله دارای ریشه های مشترک خواهند بود یا یک ریشه مضاعف و یا هیچ ریشه نخواهند داشت

۳۷۳ — شرط لازم و کافی در ضرایب را برای اینکه هر دو معادله درجه دویم دارای یک ریشه مشترک باشند میتوان بقاعده معرفات قرینه نیز بدست آورد ولیکن ما فقط بذکر قاعده مذکوره فوق اکتفا کردیم

۴ — حل دستگاه معادلات مخصوصه

مسئله ۱ — حل کنید این دو معادله را $x + y = a$ و $xy = b$

در نمره ۳۰۹ اشاره شد که x و y عبارتند از ریشه های معادله درجه دویم $z^2 - az + b = 0$ یکی از ریشه های این معادله مقدار x است و دیگری مقدار y بنابراین دو رشته جواب ذیل نتیجه شوند بواسطه تبدیل x و y بیکدیگر

$$\begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases}$$

و در حقیقت این دو جواب منجر شوند فقط بیک جواب و همین نکته را در کلیه معادلات ذیل باید منظور داشت

مسئله ۲ — حل کنید این دستگاه را $x - y = a$ و $xy = b$ چون

قرار دهیم $-y = y_1$ میتوان چنین نوشت $x + y_1 = a$ و $x(-y_1) = -b$ پس x و y_1 ریشه های این معادله باشند $z^2 - az + b = 0$ یکی از ریشه ها نمایش مقدار x است و دیگری نمایش مقدار y با علامت مخالف نماید دستگاه مفروض دارای دو جواب باشد و شرط حقیقی بودن ریشه ها این است $\frac{a^2}{4} + b \geq 0$

مسئله ۳ — حل کنید این دستگاه را $x^2 + y^2 = a$ و $x + y = b$

طرفین معادله ثانی را مجذور میکنیم پس $x^2 + y^2 + 2xy = b^2$

و چون معادله اول را از معادله اخیر عضو بعضو نقصان کنیم حاصل شود $2xy = b^2 - a^2$ یا $xy = \frac{b^2 - a^2}{2}$ پس x و y عبارتند از ریشه های این معادله $z^2 - bz + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0$ و دستگاه مفروض دارای دو جواب باشد

$$\begin{cases} x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \\ y = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} \end{cases}$$

مسئله ۴ — حل کنید این دستگاه را $x^2 + y^2 = a^2$ و $x - y = b$

چون قرار دهیم $-y = y_1$ دستگاه مفروض راجع شود بدستگاه مسئله سابق و بایصورت درآید $x^2 + y_1^2 = a^2$ و $x + y_1 = b$ پس x و y_1 عبارتند از ریشه های این معادله $z^2 - bz + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0$ یکی از ریشه ها نمایش مقدار x است و دیگری نمایش مقدار y_1 و اگر این ریشه ها حقیقی باشند دستگاه

مفروض دارای دو جواب خواهد بود

مسئله ۵ — حل کنید این دستگاه را $x^2-y^2=a^2$ و $x+y=b$

پس از حذف y این معادله درجه اول حاصل میشود $2bx-b^2=a^2$

پس دستگاه مفروض فقط یک جواب قبول کند $x=\frac{b^2+a^2}{2b}$

و $y=\frac{b^2-a^2}{2b}$ و این دستگاه را بطریق ذیل هم میتوان حل نمود چون $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ پس اگر طرفین دو معادله مفروضه را عضو بعضو بر یکدیگر قسمت کنیم حاصل شود $x-y=\frac{a^2}{b}$ و چون این معادله را با $x+y=b$ ترکیب کنیم همان اجوبه سابقه بدست آید و بهمین طریق نیز میتوان دستگاه $\begin{cases}x^2-y^2=a^2\\ x-y=b\end{cases}$ را حل نمود

مسئله ۶ — این دستگاه را حل کنید $x^2+y^2=a$ و $xy=b$ چون طرفین معادله ثانی را در ۲ ضرب کنیم و هر دو معادله را عضو بعضو بر یکدیگر بیفزائیم و از یکدیگر بکاهیم دستگاه ذیل حاصل شود $(x+y)^2=a+2b$ و $(x-y)^2=a-2b$

و پس از استخراج جذر از طرفین $x+y\pm\sqrt{a+2b}$ و $x-y\pm\sqrt{a-2b}$

و از آنجا $x=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}\right]$

$y=\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}\right]$ و چون علامات جذور رادیکالها را بجمیع طرق

ممکنه ترکیب کنیم چهار مقدار برای x و چهار مقدار برای y نتیجه میشود لهذا دستگاه مفروض چهار جواب قبول کند و شرط حقیقی بودن ریشه‌ها اینست $a+2b>0$ و $a-2b>0$ و از آنجا $a>0$ و $a^2-4b^2>0$

تبصره ۱ — دستگاه مفروض $\begin{cases}x^2+y^2=a\\ xy=b\end{cases}$ (۱) را بطریق ذیل نیز میتوان حل نمود چون طرفین معادله ثانی را مجذور کنیم دستگاه مفروض مبدل شود بدستگاه جدید که عمومیتش بیشتر است $\begin{cases}x^2+y^2=a\\ x^2y^2=b^2\end{cases}$ (۲) پس x^2 و y^2 عبارتند از ریشه‌های معادله درجه دویم $z^2-az+b^2=0$ بنابراین x و y دارای چهار مقدار خواهند بود $\pm\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}$ و $\pm\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}$

و باید ملتفت بود که تعمیم معادله $x^2y^2=b^2$ بیشتر است از $xy=b$ زیرا که معادل است با دو معادله $xy=b$ و $xy=-b$ لهذا دستگاه (۲) با دو دستگاه (۱) و $\begin{cases}x^2+y^2=a\\ xy=-b\end{cases}$ (۳) نیز معادل میگردد و از هشت جواب دستگاه (۲) چهار جواب متعلقند بدستگاه (۱) و چهار جواب دیگر تعلق گیرند بدستگاه (۳) و این اجوبه بعینه همان اجوبه سابقند هر چند بصور مختلفه باشند مثلاً $\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}\right]$

صحت این رابطه را بواسطه قاعده تبدیل مذکوره در نمره ۳۴۳ میتوان تحقیق نمود

تبصره ۲ — برای حل دستگاه مفروض (۱) باز ممکن است مقدار y را

از معادلهٔ ثانی استخراج کرده در معادلهٔ اول نقل نمود تا معادلهٔ دو مجذوری تشکیل شود که میتوان حل نمود

مسئله ۷ — حل کنید این دستگاه را $x^2-y^2=a$ و $xy=b$ چون بقاعدهٔ تبدیل مقدار y را حذف کنیم معادلهٔ دو مجذوری $x^4+ax^2-b^2=0$ تشکیل میشود که دارای دو ریشهٔ حقیقی است $x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}$ و برای تعیین y چون مقدار x را حذف کنیم حاصل شود $y^4+ay^2-b^2=0$ و این معادله نیز دارای دو ریشهٔ حقیقی است $y=\pm\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}$ علامت جلو رادیکالها را باید طوری اختیار نمود که حاصل ضرب xy بعلامت a باشد

و اما این دستگاه را میتوان تبدیل نمود بدستگاه مسئله فوق بعد این تساوی

$$(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2$$ و بعد

$$(x^2+y^2)^2=a^2+4b^2$$ و از آنجا $$x^2+y^2=\sqrt{a^2+4b^2}$$

مسئله ۸ — حل کنید دستگاه را $\begin{matrix} x+y=a \\ x^3+y^3=b^3 \end{matrix}$ این دستگاه را میتوان بصورت ذیل تبدیل نمود

$x+y=a$ و $(x+y)^3-3xy(x+y)=b^3$ و یا $x+y=a$ و $xy=\frac{a^3-b^3}{3a}$ پس x و y عبارتند از ریشه های این معادله

$$z^2-az+\frac{a^3-b^3}{3a}=0$$ که فقط یک جواب قبول کند

مسئله ۹ — حل کنید این دستگاه را $\begin{matrix} x+y=a \\ x^4+y^4=b^4 \end{matrix}$

این دستگاه را بدستگاه ذیل تبدیل میکنیم $x+y=a$ و

$$(x+y)^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2=b^4$$

یا $x+y=a$ و $$a^4-4xy\left[(x+y)^2-2xy\right]-6x^2y^2=b^4$$

یا $x+y=a$ و $$2x^2y^2-4a^2xy+a^4-b^4=0$$

و از این معادلهٔ اخیره میتوان مقدار $xy=z$ را استخراج نمود پس x و y ریشه های این معادله باشند $u^2-au+z=0$ و بهمین طریق سهل میتوان دستگاه $\begin{matrix} x+y=a \\ x^5+y^5=b^5 \end{matrix}$ را حل نمود

مسئله ۱۰ — حل کنید این دستگاه را $x^3+y^3=a$ و $xy=b$ چون طرفین معادلهٔ ثانی را مکعب کنیم چنین میشود $x^3y^3=b^3$ پس x^3 و y^3 عبارتند از ریشه های این معادله $z^2-az+b^3=0$ و بهمین طریق سهل میتوان هر دستگاه کلی $x^m+y^m=a$ و $xy=b$ را حل نمود و اما وقتیکه m زوج باشد ریشه های خارجی در معادله داخل میشوند که تشخیص آنها نیز سهل است

مسئله ۱۱ — حل کنید این دستگاه را $x+y+z=2p$

بعد از ۱۸ سال اصل و فرع مجموعاً بچه مبلغ میرسد در صورتیکه منافع را آخر هر ششماه سرمایهٔ جدید قرار دهیم — باید در فورمول (۱) چنین قرار داد $r = 0.0225$ و $n = 36$ پس جواب چنین میشود $A = 12654$ تومان

۲ — در چه مدت سرمایه که از قرار فرع ۵ ٪ بربحهٔ مرکب گذارده شود اصل و فرع مجموعاً معادل میشود با سه برابر سرمایه در صورتیکه منافع را آخر هر ششماه تجدید کنیم

۳ — عدد نفوس مملکتی امروزه ۱۴۵۲۸۷۴۰ نفر است تحقیق شده که هر سال بقدر $\frac{1}{200}$ جمعیت ابتدای همان سال بر عدهٔ نفوس افزوده میشود پس جمعیت این مملکت بعد از ۴۰ سال چقدر خواهد شد

۲ — قسط السنین و امثلهٔ عددیه

۴۲۳ — **تعریف** — قسط السنین عبارتست از مبلغ ثابتی که شخص معینی میگیرد که هر سال بپردازد تا چند سال یعنی خواه برای تکمیل سرمایه و خواه برای استهلاک دین هر چند قسط السنین عموماً باید ثابت باشد لیکن در بعضی اوقات ممکنست بر وفق قاعدهٔ معینی تغییر کند مثلاً اقساط سنویه مثل تصاعد حسابی یا هندسی باشند. علاوه بر این میتوان منافع را هر سال یا هر ششماه یا هر ماه وغیره سرمایهٔ جدید قرار داد و همچنین قسط السنین را در آخر هر ششماه یا هر ماه وغیره پرداخت

$z^2 = x^2 + y^2$ و $2m^2 = xy$ طرفین معادلهٔ سوم را در ۲ ضرب کرده بر معادلهٔ دوم بیفزاییم حاصل شود $(x+y)^2 = z^2 + 4m^2$

و چون بجای $x + y$ مقدارش $2p - z$ را قرار دهیم چنین میشود $(2p - z)^2 = z^2 + 4m^2$ یا $pz = p^2 - m^2$ و از آنجا

$z = \frac{p^2 - m^2}{p}$ پس x و y را میتوان از روی این دستگاه دو بدست آورد

$x + y = 2p - z = \frac{p^2 + m^2}{p}$ و $xy = 2m^2$

یعنی x و y عبارتند از ریشه های این معادله $X^2 - \frac{p^2 + m^2}{p}X + 2m^2 = 0$

و این دستگاه مفروض نظیر است با مسئلهٔ هندسی ذیل معلوم کنید اضلاع مثلث قائم الزاویه را که محیطش $2p$ و سطحش معادل با مربعیکه بضلع m باشد

امثلهٔ متعلق بفصل شانزدهم

۱ — دستگاه معادلات ذیل را حل کنید

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x^2 - 3y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y^2 + 3x^2 = 30752 \\ 9y - 5x = 424 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x^2 - 2y^2 = 67 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 813 \\ 7x - 4y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x - 8y = 15 \\ 2x^2 - xy + 4y^2 = 252 \end{cases}$$

۴۲۴ – تشکیل سرمایه بواسطهٔ قسط السنین – هرگاه در ابتدای هر سال تا مدت n سال مبلغ ثابت a تومان بعنوان قسط السنین از قرار نرخ r بربح مرکب معامله شود میخواهیم بدانیم سرمایهٔ کل A که بعد از انقضای n سال تشکیل میشود چه مبلغ است. قسط السنین اول a که از ابتدای سال اول در مدت n سال بربح مرکب معامله شود بعد از n سال میرسد بمبلغ $a(1+r)^n$ و قسط السنین دوم که از ابتدای سال دوم تا $n-1$ سال در مرابحه مرکب باشد در انتهای n سال میرسد بمبلغ $a(1+r)^{n-1}$ و قسط سوم که از اول سال سوم در $n-2$ سال بربح مرکب داده شود در انتهای n سال خواهد رسید بمبلغ $a(1+r)^{n-2}$ و بالاخره قسط آخر فقط یکسال در مرابحه خواهد ماند و در آخر سال میشود $a(1+r)$ پس سرمایهٔ کل A در انتهای n سال عبارت باشد از مجموع مبالغی که از اقساط سنویه بانضمام منافع آنها حاصل شود پس این تساوی نتیجه میشود

$$A = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \dots + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n$$

طرف ثانی این تساوی عبارت است از حاصل جمع جمل تصاعد هندسی که جملهٔ اولش $a(1+r)$ و قدر نسبتش $(1+r)$ باشد پس

$$A = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{(1+r)-1}$$

یا

$$A = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r} \qquad (4)$$

و بصورت لگاریتم چنین میشود

$$\log A = \log a + \log(1+r) + \log\left[(1+r)^n - 1\right] + \operatorname{colog} r$$

ولیکن این فورمول بعمل لگاریتم مستقیماً قابل اجرا نیست زیرا که مقدار عددی $\left[(1+r)^n - 1\right]$ مستقیماً معلوم نیست پس باید ابتدا $(1+r)^n$ را بوسیلهٔ لگاریتم یا طریق دیگر حساب نمود $(1+r)^n - 1$ را تشکیل داد و بعد مقدار A را با عمل لگاریتمی تعیین کرد

مثال -۱- هرگاه شخصی در ابتدای هر سال مبلغ ۱۲۵ تومان از قرار ۲٫۵٪ تا ۱۰ سال بربح مرکب دهد میخواهیم بدانیم بعد از ده سال چه مبلغ عاید او میشود

$a = 125$ و $n = 10$ و $r = 0{,}025$ ابتدا $(1+r)^n$ را حساب میکنیم

$\log(1+r) = 0{,}0107239$ و $10\log(1+r) = 0{,}1072390$

و از آنجا چنین استخراج میشود $(1+r)^{10} = 1{,}28008$ و $(1+r)^{10} - 1 = 0{,}28008$

پس $\log A = \log 125 + \log 1{,}025 + \log 0{,}28008 + \operatorname{colog} 0{,}025$

$$\begin{aligned}
\log a &= 2{,}0969100\\
\log(1+r) &= 0{,}0107239\\
\log\left[(1+r)^n - 1\right] &= \bar{1}{,}4472821\\
\operatorname{colog} r &= 1{,}6020600\\
\hline
\log A &= 3{,}1569760
\end{aligned}
\qquad A = 1435{,}41 \text{ تومان}$$

مثال -۲- چه مبلغ باید در اول هر سال بربح مرکب داد تا بعد از ۱۵ سال از قرار نرخ ۵٪ مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان عاید شود

از فورمول (۱) چنین استخراج میشود $a = \frac{Ar}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$

ویا $a = \frac{Ar}{(1+r)^{n+1} - (1+r)}$ و بصورت لگاریتم چنین میشود

$$\log a = \log A + \log r - \log(1+r) - \log[(1+r)^n - 1]$$

ابتدا مقدار $(1+r)^{15}$ را بعمل لگاریتم حساب میکنیم حاصل میشود $1{,}05^{15} = 2{,}078928$

پس $\log a = \log 50000 + \log 0{,}05 - \log 1{,}05 - \log 1{,}078928$

و از آنجا $\log a = 3{,}3437584$ پس $a = 2206{,}78$

۴۲۵ — **تبصرة** — چون تعیین A مستقیماً بعمل لگاریتم چندان سهل نیست در ممالک اروپا محض سرعت محاسبات جداولی مانند جداول ربح مرکب ترتیب داده اند که مقادیر مضروب $\frac{(1+r)[(1+r)^n - 1]}{r}$ بازاء مقادیر متداوله r و n در آنها ضبط است چنانچه در سالنامه‌های فرانسه مقادیر این مضروب بازاء نرخهای r از ۰٫۰۱۵ الی ۰٫۰۵ بفواصل ۰٫۰۰۵ از یک الی صد سال نوشته شده و اما در بانکها و در ادارات مالیه جداول مفصل تر استعمال کنند

مثال — هرگاه مبلغ ۱۰۰۰ تومان در اول هر سال از قرار ۴ بر ربح مرکب داده شده بعد از ۲۵ سال سرمایه کل بچه مبلغ میرسد مقدار عددی مضروب فوق را در سالنامه تفحص میکنیم $\frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04} = 41{,}645908$ پس مبلغ مطلوب چنین میشود

$A = 1000 \times 41{,}645908 \times 1{,}04 = 43311{,}44$ تومان

۴۲۶ — فورمول (۱) شامل چهار مقدار A و a و r و n است چنانکه اگر سه تای از آنها معلوم باشد میتوان مقدار چهارم را استخراج نمود پس در مسائل قسط السنین چهار حالت مختلفه طرح میشود هرگاه A یا a مجهول باشد مسئله را مانند دو مثال مذکور میتوان بدون اشکال حل نمود و اما وقتیکه r مجهول باشد مسئله بواسطه اعمال مقدماتی همواره قابل حل نیست زیراکه اگر $(1+r) = x$ را مجهول مسئله فرض کنیم فورمول (۱) بصورت ذیل در آید

$$A = \frac{ax(x^n - 1)}{x - 1} = a(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x)$$

پس برای تعیین x این معادله تشکیل میگردد

$$ax^n + ax^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + ax^2 + ax - A = 0$$

این معادله کاملا از درجه n است که بطریق مقدماتی نمیتوان حاصل نمود وقتیکه n از ۲ تجاوز کند و علاوه بر این هیچوقت این مسئله در عملیات اتفاق نیافتد چونکه نرخها در ممالک متمدنه همواره ثابت است مع ذلک وقتیکه r بحسب اتفاق مجهول باشد آنرا بمدد جداول نرخها یا بقاعده تقریبات متوالیه معلوم میکنیم

مثال — ۳ — از قرار چه نرخی باید اول هر سال مبلغ a تومان بربح مرکب

گذاشت تا بعد از n سال مبلغ A تومان عاید شود

معادلهٔ سابقه را باین صورت مینویسیم

$$A = a(1+r) + a(1+r)^2 + \cdots + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^n$$

چون فرض کنیم $r = 0$ طرف ثانی چنین میشود na و این مقدار باید کوچکتر از A باشد چونکه A مرکب است از na باضافهٔ منافع اقساط a پس اگر r به نهایت ترقی کند طرف ثانی متدرجاً زیاد میشود و اگر بمقادیر غیر محسوسه تغییر نماید پس یکمقدار منحصری برای r یافت میشود که در معادله صدق کند لهذا برای تعیین مقدار تقریبی r بجای آن متدرجاً اعداد ٠ و ١ و ٢ ... قرار میدهیم مثلاً فرض میکنیم طرف ثانی بازاء $r = 3$ کوچکتر از A باشد و بازاء $r = 4$ بزرگتر از آن پس r واقع باشد مابین ٣ و ٤ و آنوقت بجای r عدد ٣,٥ قرار میدهیم اگر حاصل بزرگتر از A باشد r واقع گردد مابین ٣ و ٣,٥ و چون مقادیر ٣,١ و ٣,٢ و ٣,٣ و ٣,٤ را متدرجاً قرار دهیم r را تا $\frac{1}{10}$ تقریب اضافی و نقصانی بدست میآید و چون همین طریق پیش رویم مقدار r را بتقریب مطلوب استخراج میشود و اگر فرمول (١) را بصورت ذیل قرار دهیم محاسبات مختصر میشود

$$\frac{A}{a} = \frac{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r} = \frac{(1+r)^{n+1} - (1+r)}{r}$$

مثلاً فرض میکنیم

$a = 2000$ و $A = 65566,25$ و $n = 20$

و بخواهیم r را معلوم کنیم ابتدا چنین اختیار میکنیم $r = 0,04$ طرف اول مساوی چنین میشود

$$\frac{65566,25}{2000} = 32,783125$$

و طرف ثانی میشود

$$\frac{1,04^{21} - 1,04}{0,04} = 30,9692$$

چون طرف ثانی کوچکتر است از طرف اول پس r خیلی کوچک است فرض میکنیم $r = 0,05$ آنوقت می بینیم بعکس طرف ثانی بزرگتر است از طرف اول پس معلوم میشود که نرخ مطلوب باید کوچکتر از ٥ باشد یعنی مابین ٤ و ٥ پس فرض میکنیم $r = 0,0475$ باز می بینیم که طرف ثانی بزرگتر است از طرف اول لهذا باید r واقع باشد مابین ٤ و ٤,٧٥ و اگر فرض کنیم $r = 0,045$ طرفین تقریباً مساوی میگردد

پس نرخ مطلوب مساوی است با ٤,٥٠

٤٢٧ — هرگاه n مجهول باشد باید جواب عدد صحیح باشد والا مسئله غیر ممکن است دا وقتیکه n کسری باشد میتوان a یا A مقداری معین نمود که n عدد صحیح باشد و این مسئله را بمدد جداول نرخها میتوان بسهولت حل کرد و کیفیت که در ستون نظیر نرخهای r آن مقداری از n را تفحص نمود که بازاء آن مقدار اکسپرسیون $\frac{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$ مساوی $\frac{A}{a}$ باشد و بعمل گذاریم نیز

بسیار سهل است از فورمول (۱) چنین استخراج کنیم

$$(1+r)^n = \frac{Ar + a(1+r)}{a(1+r)}$$ و از آنجا

$$n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a - \log(1+r)}{\log(1+r)}$$

و یا این صورت

$$n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a}{\log(1+r)} - 1$$

فورمول (۱) را بصورت ذیل نیز میتوان در آورد

$$\log[(1+r)^n - 1] = \log A + \log r + \operatorname{colog} a + \operatorname{colog}(1+r)$$

و مقدار $[(1+r)^n - 1]$ را چون حساب کنیم مقدار $(1+r)^n$ معلوم میگردد مثلا فرض میکنیم $(1+r)^n = x$ پس $n = \frac{\log x}{\log(1+r)}$ و اگر خارج قسمت عدد صحیح نباشد جواب مسئله تقریبی خواهد بود و آنوقت مقدار n را مساوی جزء صحیح خارج قسمت اختیار میکنیم

مثال — هرگاه اول هر سال مبلغ ۲۰۰۰ تومان بربح مرکب گذاریم از قرار ۴٫۵ ٪ بعد از چند سال میتوان مبلغ ۶۵۵۶۶٫۲۵ تومان عاید داشت

چون در فورمول $n = \frac{\log[Ar + (1+r)] - \log a}{\log(1+r)} - 1$ بجای حروف مقادیر عددیه شان را قرار دهیم چنین میشود

$$n = \frac{\log(65566.25 \times 0.045 + 2000 \times 1.045) - \log 2000}{\log 1.045} - 1$$

پس $n = \frac{\log 5040.481 - \log 2000}{\log 1.045} - 1$ و $n = \frac{3.7024720 - 3.3010300}{0.0191163} - 1$

و از آنجا $n = 20$ پس مدت مطلوب ۲۰ سال است

مثال — هرگاه اول هر سال مبلغ ۱۲۰۰ تومان بربح مرکب گذاریم از قرار ۴ ٪ بعد از چه مدت میتوان مبلغ ۳۰۰۰۰ تومان عاید داشت

در فورمول

$$n = \frac{\log[Ar + a(1+r)] - \log a - \log(1+r)}{\log(1+r)}$$

بجای حروف مقادیر عددیه مفروضه را قرار دهیم

$$n = \frac{\log[30000 \times 0.04 + 1200 \times 1.04] - \log 1200 - \log 1.04}{\log 1.04}$$

$$Ar + a(1+r) = 30000 \times 0.04 + 1200 \times 1.04 = 2448$$

$$n = \frac{\log 2448 - \log 1200 - \log 1.04}{\log 1.04} = \frac{0.2925969}{0.0170333}$$

و پس از عمل تقسیم معلوم میشود که عدد n واقع ما بین ۱۷ و ۱۸ است پس این مسئله با معلومات مفروضه فوق غیر ممکن است ولیکن میتوان معلوم نمود که چه قسط السنینی باید بربح مرکب گذاشت تا بعد از ۱۷ یا ۱۸ سال مبلغ ۳۰۰۰۰ تومان سرمایه عاید شود و یا اینکه با ۱۷ یا ۱۸ قسط السنه ۱۲۰۰ تومان چه مبلغ سرمایه میتوان تحصیل نمود و پس از حساب معلوم میشود که با ۱۷ قسط السنین ۱۲۱۷٫۲۷ تومان مبلغ ۳۰۰۰۰ تومان عاید میشود و همین مبلغ را میتوان با ۱۸ قسط السنین ۱۱۲۴٫۸۱ حاصل نمود و از طرف دیگر با ۱۷ قسط السنین ۱۲۰۰ تومان مبلغ ۲۹۵۷۴٫۴۷ تومان عاید میشود

و با همان قسط السنین در ۱۸ سال مبلغ ۳۲۰۰۵٫۳۶ تومان حاصل میشود

۴۲۸ – تنخواه فعلی – تنخواه فعلی V عبارت است از مبلغی که چون آنرا فقط یکمرتبه در ابتدای سال اول بربح مرکب گذاریم بعد از انقضای n سال برسد بهمان مبلغی که از قسط السنین α در n سال عاید میشود پس از این تعریف رابطهٔ ذیل حاصل میشود $V(1+r)^n = \alpha(1+r)\frac{(1+r)-1}{r}$ و از آنجا $V = \frac{\alpha}{r}(1+r)\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$ و اما سالنامه‌های فرانسه جداولی شامل‌اند که مقادیر $(1+r)\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$ بازاء مقادیر مختلفهٔ r و n در آنها ضبط است

۴۲۹ – تبصره – هرگاه در مسئلهٔ قسط السنین اقساط سالیانه در آخر هر سال پرداخته شود در اینصورت هر قسط α یک سال کمتر در مرابحهٔ مرکب خواهد ماند مثلاً قسط اول $n-1$ سال و قسط دوم $n-2$ سال در مرابحه خواهد بود و همچنین قسط آخر هیچ نفع نخواهد داشت پس مجموع کل اقساط سنویه با انضمام منافعشان برابری نموده میشود

$$A = \alpha + \alpha(1+r) + \alpha(1+r)^2 + \dots + \alpha(1+r)^{n-2} + \alpha(1+r)^{n-1}$$

و چون طرف ثانی حاصل جمع جمل تصاعد هندسی است پس فرمول کلی قسط السنین چنین میشود

$$A = \alpha\frac{(1+r)^n-1}{r} \quad (۲)$$

چون این فرمول مانند فرمول (۱) مستقیماً بعمل لگاریتم قابل حل نیست محض سرعت و سهولت محاسبات در عملیات جداولی از مقادیر مختلفهٔ $\frac{(1+r)^n-1}{r}$ ترتیب داده‌اند یعنی سرمایه که از قسط السنین یک تومان در آخر هر سال بعد از n سال بنرخ r حاصل شود چنانکه یکی از این جداول در سالنامهٔ فرانسه ضبط است و جمیع مطالب و حالات مذکوره در فرمول (۱) بالعینه در فرمول (۲) بحث میکنیم و هرگاه سه تا از چهار مقدار A و α و r و n معلوم باشند میتوان مقدار چهارم را استخراج نمود پس از اینجا چهار مسئلهٔ مختلف طرح میشود که آنها را بهمان طریق مسائل سابقهٔ قسط السنین حل میکنیم

۴۳۰ – وقتیکه اقساط سنویه در آخر هر سال پرداخته شود فرمول تنخواه فعلی چنین میشود $V = \frac{A}{(1+r)^n}$ یا $V = \frac{\alpha}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^n}\right]$

امثله

۱– هرگاه شخصی در آخر هر سال ۱۲۵۰ تومان از قرار ۴٪ بربح مرکب گذارد بعد از ۲۰ سال چه مبلغ عاید او میشود (جواب ۳۷۲۲۳ تومان)

۲– حساب کنید مبلغ قسطی که آخر هر سال از قرار ۴٫۵٪ باید بربح مرکب گذارد

تا بعد از ۱۵ سال مبلغ ۲۴۰۰۰ تومان سرمایه کل عاید شود (ج) ۱۱۵۴٫۷۰ تومان

۳ – هرگاه در آخر هر سال مبلغ ۱۴۰۰ تومان از قرار ۳٫۵ نز بربح مرکب عاید شود پس از چند مدت مبلغ ۴۵۲۶۰ تومان عاید خواهد شد (ج) ۲۲ سال

۴ – از قرار چه نرخی در آخر هر سال مبلغ ۱۱۵۰ تومان بربح مرکب گذاریم بعد از ۲۵ سال مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان عاید میشود (جواب) ۳٫۲۵ نز

استهلاک دین و امثله عددیه

۴۳۱ – استهلاک دین عبارت از اینست که شخص مدیون مبلغ دین را تدریجاً باقساط متساویه منظماً بپردازد تا بکلی مستخلص شود

مثلاً فرض میکنیم شخص مبلغ A تومان از قرار نرخ r بر ابجه مرکب قرض کند این قرض بعد از n سال میرسد بمبلغ $A(1+r)^n$ تومان که باید بطلبکار عاید شود و اما اگر شخص مدیون بخواهد این مبلغ را باقساط سنین در n سال متوالیه ترتیباً مستهلک نماید اقساط متساویه a که در آخر سال اول و سال دوم و ... و سال n ام پرداخته میشوند مجموعاً یک سرمایه تشکیل میدهند مساوی با $a\frac{(1+r)^n-1}{r}$ (نمره ۴۲۹) و بنابفرض باید این مبلغ برابر شود با $A(1+r)^n$. یعنی مبلغ قرض بعد از n سال مساویست با مبلغ سرمایه که در همان مدت از مجموع اقساط

سالیانه حاصل میشود پس

$$A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n-1}{r} \quad (1)$$

و از آنجا

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1} \quad (2)$$

و غالباً این فورمول را مرافقین بصورت ذیل در آورده استعمال میکنند

$$a = A\frac{r}{1-\frac{r}{(1+r)^n}}$$

هرگاه در فورمول (۱) سه تای از چهار مقدار a و A و n و r معلوم باشند میتوان مقدار چهارم را استخراج نمود

مثال ۱ – شخصی مبلغ ۵۰۰۰۰ تومان از قرار نرخ ۴ درصد قرض نموده میخواهد آنرا در مدت ۲۵ بقسط سنین مستهلک سازد مطلوب است مبلغ هر قسط در فورمول (۲) چنین قرار دهیم $A = 50000$ و $r = 0{,}04$ و $n = 25$

و ابتدا بازاء مقادیر r و n مقدار $(1+r)^n$ را بجدولگاریتم حساب میکنیم و بعد بترتیب چنین حاصل میشود $(1+r)^n = 2{,}66658$ و $\frac{r}{(1+r)^n-1} = 0{,}02400$ پس

$$a = 50000 \times 2{,}66658 \times 0{,}02400$$

و از آنجا $a = 3200{,}60$ تومان

مثال (۲) چه مبلغ است قرضی که میتوان آنرا در ۳۴ قسط سنین ۱۵۰۰ تومان از قرار $4\frac{1}{2}$ درصد مستهلک نمود

از فورمول (۱) چنین استخراج کنیم

$$A = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r\cdot(1+r)^n}$$

و چنین قرار میدهیم $a = 1500$ ، $r = 0.045$ ، $n = 34$

و ابتدا بمدد لگاریتم مقدار $(1+r)^n$ را حساب میکنیم $(1+r)^n = 4.4664$

و از آنجا $A = 1500 \times \frac{3.4664}{4.4664 \times 0.045}$ و پس از محاسبه بمدد

لگاریتم یا بطریق دیگر چنین نتیجه میشود $A = 25870$

۴۳۲ — هرگاه n مجهول باشد فورمول $A(1+r)^n = a\frac{(1+r)^n - 1}{r}$

را باین صورت مینویسیم $(1+r)^n(a - Ar) = a$

و از طرفین لگاریتم میگیریم $n\log(1+r) + \log(a - Ar) = \log a$

و از آنجا $n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}$ و از این فورمول ظاهر است

که اگر $a - Ar$ منفی باشد مسئله محال است چونکه اعداد منفیه لگاریتم ندارد

و علاوه بر این چون Ar منفعت مبلغ استقراضی A است پس بدیهی است که اگر

قسط سنه a کوچکتر از Ar باشد ابداً قرض مستهلک نمیشود بلکه رفته رفته بر آن افزوده میشود

و باید مقدار n عدد صحیح باشد والا مسئله با معلومات مفروضه غیر ممکن است

مثال ۴ — در چه مدت میتوان مبلغ ۱۰۰۰۰۰ تومان قرض را مستهلک نمود

در صورتیکه سالی مبلغ ۸۸۶۹٫۹۰ تومان قسط السنین از قرار ۵ درصد بدهیم

در فورمول $n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}$ چنین قرار میدهیم

$a = 8869.9$ و $A = 100000$ و $r = 0.05$ پس حاصل میشود

$$n = \frac{\log 8869.9 - \log 3869.9}{\log 1.05} = \frac{0.36021}{0.02119} = 18$$

۴۳۳ — وقتیکه r مجهول باشد چون معادلهٔ (۱) را بصورت صحیح در آوریم

نسبت به مجهول r از درجهٔ $(n+1)$ خواهد بود و مقدار r را از روی

آن نمیتوان مستقیماً استخراج نمود ولیکن بوسیله امتحانات متوالیه میتوان برای

r یک مقداری با هر قدر تقریب که بخواهیم بدست آورد پس ابتدا فورمول

(۱) را باین صورت در آوریم $\frac{a}{A} = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ و بسهولت

میتوان دید که طرف اول معادلهٔ فوق ترقی میکند وقتیکه عدد مثبت r نمو کند

پس هرگاه مقداری برای r فرض کرده در $\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ قرار دهیم

اگر حاصل این اکسپرسیون بزرگتر از $\frac{a}{A}$ باشد معلوم میشود که مقدار مفروضه r خیلی

بزرگ است و اگر بر خلاف کوچکتر از $\frac{a}{A}$ باشد r خیلی کوچک است و چون

بهمین طریق امتحان پیش رویم میتوان دو عدد یافت که اختلافشان از یکدیگر بقدر جزئی

باشد که بخواهیم و شامل عدد مطلوب r باشند و چون ملاحظه کنیم که $a - Ar$

بالضروره مثبت است پس r باید کوچکتر از $\frac{a}{A}$ باشد لهذا امتحانات

لازمه را میتوان در اعداد کوچکتر از $\frac{a}{A}$ قرار داد

مثال ۴ — مرابی باین شرط پول قرض میدهد که مبلغ استقراضی در ۲۵ قسط بکلی پرداخته شود و هر قسط سنه برابر باشد با $\frac{1}{15}$ اصل مبلغ استقراضی پس از قرار چه نرخی معامله میکند

درانیجا $n=25$ ، $\frac{a}{A}=\frac{1}{15}=$ ۰٫۰۶۶۶ و عدد r بعبارت دیگر کوچکتر است از $\frac{a}{A}$ یعنی از ۰٫۰۶۶ ابتدا عدد ۰٫۰۵ را امتحان میکنیم مقدار عددی $\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ چنین میشود ۰٫۰۷ این عدد بزرگتر است از ۰٫۰۶۶ پس معلوم میشود که ۰٫۰۵ خیلی بزرگ است و حال ۰٫۰۴ را امتحان میکنیم مقدار عددی اکسپرسیون فوق چنین میشود ۰٫۰۶۴ این عدد کوچکتر است از ۰٫۰۶۶ پس ۰٫۰۴ خیلی کوچک است و از اینجا استنباط میکنیم که r واقع است مابین ۰٫۰۴ و ۰٫۰۵ پس ۰٫۰۴۵ را امتحان میکنیم مقدار عددی $\frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$ میشود ۰٫۰۶۷ این عدد بزرگتر است از ۰٫۰۶۶ پس ۰٫۰۴۵ خیلی بزرگ است و r واقع است مابین ۰٫۰۴ و ۰٫۰۴۵ و باز ۰٫۰۴۲۵ را امتحان میکنیم مقدار اکسپرسیون فوق میشود ۰٫۰۶۳ این عدد کوچکتر است از ۰٫۰۶۶ پس ۰٫۰۴۲۵ خیلی کوچک است و r واقع است مابین ۰٫۰۴۲۵ و ۰٫۰۴۵ لهذا نرخ مطلوب واقع است مابین $4\frac{1}{4}$ و

$4\frac{1}{2}$ و اگر تقریب بزرگتر بخواهیم بهمین طریق پیش میرویم

۲۳۴ — **تبصره** — اولاً هرگاه فورمول (۲) را باین صورت درآوریم $a\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right)=Ar$ و فرض کنیم $n=\infty$ مقدار $\frac{1}{(1+r)^n}$ صفر میشود و بعد $a=Ar$ یعنی قسط سنین a برابر باشد با Ar منفعت مبلغ استقراضی A پس در اینصورت قرض ابداً استهلاک نمیشود و این حالت در مسائل عایدات مادام الحیات اتفاق میافتد

ثانیاً در فورمول (۲) فرض میکنیم $r=0$ پس $a=\frac{0}{0}$ و لیکن این ابهام ظاهریست برای رفع آن فورمول را باین صورت می نویسیم $a=\frac{Ar(1+r)^n}{r\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]}$ و اما اکسپرسیون $\frac{(1+r)^n-1}{r}$ عبارتست از حاصل جمع جمل تصاعد هندسی ذیل

$$\div 1:(1+r):(1+r)^2:\dots:(1+r)^{n-2}:(1+r)^{n-1}$$

پس رابطه فوق چنین نوشته میشود

$$a=\frac{Ar(1+r)}{r\left[1+(1+r)+(1+r)^2+\dots+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-1}\right]}$$

و حال اگر ابتدا عامل مشترک r را از دو جمله کسر حذف نمائیم و بعد فرض کنیم $r=0$ صورت کسر میشود A و مخرجش n مرتبه ۱ یا n پس $a=\frac{A}{n}$ یعنی اگر در مسئله استقراض نفع منظور نشود باید در سال مبلغ $\frac{A}{n}$ قسط داده شود تا در

... سال قرض بکلی پرداخته شود

۴۳۵ — تبصرهٔ ۲ — هرگاه در مسئلهٔ قسط السنین فرض کنیم هر قسط سالیانه در دو قسط مساوی ششماهه پرداخته شود و سرمایه‌ها در هر ششماه تجدید شود در این حالت اگر مبلغ هر قسط ششماهه را a' فرض کنیم و نرخ یک تومان را در ششماه r' و عدهٔ اقساط ششماهه را n' باز چنین خواهیم داشت

$A = a'\frac{(1+r')^{n'}-1}{r'}$ و در اینجا $a'=\frac{a}{2}$ و $r'=\frac{r}{2}$ و $n'=2n$

پس فرمول فوق چنین میشود $A = a\frac{(1+\frac{r}{2})^{2n}-1}{r}$

امثله

۱ — در چه مدت باید آخر هر سال مبلغ ۴۰۰۰ تومان قسط السنه ادا نمود تا مبلغ ۲۰۳۰۲٫۷۵ تومان قرض از قرار نرخ ۵ درصد مستهلک شود

۲ — هرگاه در آخر هر سال مبلغ ۲۰۰۰ تومان قسط السنه از قرار ۵ درصد تا ۸ سال ادا کنیم چه قرضی را مستهلک میتوان کرد

۳ — شخصی مبلغ ۱۵۰۰۰ تومان از قرار ۵ درصد قرض نمود و میخواهد تا ۱۲ سال آنرا بکلی مستهلک سازد پس در آخر هر سال چه قسطی باید ادا کند

۴ — شخصی بواسطهٔ ادای ۱۶ قسط السنین ۱۷۸۰٫۳۵ تومان میخواهد خود را از ۲۰۰۰۰ تومان قرض مستخلص سازد مطلوبست نرخ مرابحه

مقالهٔ پنجم
مشتقات و تغییر معرفات
فصل بیست و دوم
مشتقات
۱ — حدود

۴۳۶ — **تعریف** — هرگاه y معرفی از x باشد گوییم حد y مقدار b است وقتیکه x میل کند بسمت a اگر چنانچه کمیت مثبت ϵ (آنقدر کوچک که بخواهیم) قبلا موجود باشد بتوان کمیت مثبت دیگر α بدست آورد چنانکه بازاء جمیع مقادیر x که در نامساوی $|x-a|<\alpha$ صدق کنند مقادیر نظیر از y در نامساوی $|y-b|<\epsilon$ صادق آید (مگر بازاء $x=a$ شاید)

مثلا حد هر قوهٔ مثبت x^m از x صفر است وقتیکه x میل کند بسمت صفر زیرا که اگر نامساوی $|x|<\epsilon^{\frac{1}{m}}$ محقق باشد نامساوی $|x^m|<\epsilon$ نیز بالبداهه محقق خواهد بود و در اینجا عدد α مساویست با $\epsilon^{\frac{1}{m}}$

تعریف مزبور را میتوان بعبارت سادهٔ ذیل چنین ادا نمود مقادیر متغیرهٔ x را میتوان آنقدر نزدیکتر به a گرفت که اختلاف y از b تا بحد

کوچکتر شود که بخواهیم (چونکه میتوان ε را بی‌نهایت کوچکتر انتخاب نمود) مقدار y که حدش L است میتواند بزرگتر شود از هر عدد ثابتی کوچکتر از L و کوچکتر شود از هر عدد مثبتی بزرگتر از L چونکه مقدار y محصور خواهد بود مابین $L+\varepsilon$ و $L-\varepsilon$ (ε میتواند آنقدر کوچکتر شود که بخواهیم)

۴۳۷ — معرف. y را گوییم بی‌نهایت ترقی میکند وقتیکه x مایل بصفر باشد اگر چنانچه یکعدد مثبت اختیاری A (آنقدر بزرگتر که بخواهیم) قبلاً موجود باشد بتوان یکعدد مثبت دیگر α یافت چنانکه بازاء جمیع مقادیر x که در نامساوی $|x-a|<\alpha$ صدق کنند مقادیر نظایرشان از y نیز در نامساوی $|y|>A$ صادق آیند (مگر بازاء $x=a$ شاید)

و باید دانست که چون y بی‌نهایت ترقی کند عکسش $\frac{1}{y}$ میل میکند بسمت صفر و بالعکس

مثال. هر قوه منفی x^{-m} از x بی‌نهایت ترقی میکند وقتیکه x میل کند بسمت صفر زیرا اگر نامساوی $|x|<\frac{1}{A^{\frac{1}{m}}}$ محقق باشد نامساوی $|x^{m}|<\frac{1}{A}$ نیز محقق خواهد بود و بعد $|x^{-m}|>A$ و در اینجا عدد α مساویست با $A^{-\frac{1}{m}}$

تعریف مزبور را میتوان بعبارت ساده ذیل ادا نمود هرگاه مقادیر x بی‌نهایت نزدیک شوند به a مقادیر مطلقه y آنقدر بزرگتر

میشوند که بخواهیم یعنی از هر عدد مثبت A که قبلاً معلوم باشد تجاوز میکنند —

y میتواند بدو طریق بی‌نهایت ترقی کند اگر مثبت باشد بجانب مقادیر مثبته و اگر منفی باشد بجانب مقادیر منفیه

۴۳۸ — حد. معرف y گوییم L است وقتیکه x بی‌نهایت ترقی کند اگر چنانچه یکعدد مثبت ε (آنقدر کوچک که بخواهیم) قبلاً معلوم باشد بتوان یکعدد مثبت A یافت چنانکه بازاء جمیع مقادیر x که در نامساوی $|x|>A$ صدق کنند مقادیر نظایرشان از y نیز در نامساوی $|y-L|<\varepsilon$ صادق آیند

مثال. هرگاه x بی‌نهایت ترقی کند هر قوه منفی x^{-m} میل میکند بسمت صفر زیرا برای محقق بودن نامساوی $|x^{-m}|<\varepsilon$ کافی است که $|x|>\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{m}}}$ نیز محقق باشد و در اینجا عدد A مساویست با $\varepsilon^{-\frac{1}{m}}$

تعریف فوق را میتوان چنین ادا نمود مقادیر مطلقه x را میتوان آنقدر بزرگتر گرفت که اختلاف y از L آنقدر جزئی باشد که بخواهیم

۴۳۹ — معرف. y را گوییم بی‌نهایت ترقی میکند وقتیکه x بی‌نهایت ترقی کند اگر چنانچه یکعدد مثبت P (آنقدر بزرگتر که بخواهیم) قبلاً معلوم باشد بتوان یکعدد مثبت A یافت چنانکه بازاء جمیع مقادیر x که در نامساوی $|x|>A$

حدی کنند مقادیر نظایرشان از y نیز در نامساوی $|y| > P$ صادق آید

مثال. هر قوه مثبت x^m از x بینهایت ترقی میکند وقتیکه x بینهایت ترقی کند زیرا که اگر نامساوی $|x| > P^{\frac{1}{m}}$ محقق باشد نامساوی $|x^m| > P$ نیز محقق خواهد بود و در اینجا عدد A نظیر P مساویست به $P^{\frac{1}{m}}$

تعریف مزبور را چنین ادا کنیم میتوان مقادیر x را آنقدر بزرگتر گرفت که مقادیر نظایرشان از y نیز بحسب مقدار مطلق آنقدر بزرگتر باشد که بخواهیم

۴۴۰ — قضیه — هرگاه دو معرف از x بازاء جمیع مقادیر x متساوی باشند دو حدشان نیز متساوی خواهند بود وقتیکه x میل کند بسمت a

فرض میکنیم y و z دو معرف از x بازاء جمیع مقادیر x همواره متساوی باشند (مگر بازاء $x=a$ شاید) چون b را حد y فرض کنیم بنا بتعریف اگر خارج یکعدد مثبت ε قبلاً معلوم باشد باید یک عدد دیگر η توان یافت که از نامساوی $|x-a| < \eta$ نامساوی $|y-b| < \varepsilon$ نتیجه شود و چون بفرض $z=y$ پس بازاء همان مقادیر x نامساوی $|z-b| < \varepsilon$ نیز محقق خواهد بود لهذا b حد z نیز هست

تبصره — باعانت قضیه فوق میتوان مقدار حقیقی هر کسر مبهم را بدست آورد مثلاً هرگاه کسری بازاء $x=a$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید مقدار حقیقی آن عبارتست

از حد این کسر وقتیکه x میل کند بسمت a پس اگر بتوان یک کسر ثانی بدست آورد که بازاء جمیع مقادیر x (مگر $x=a$) مساوی کسر مفروض باشد حدش نیز مساوی اگر کسر خواهد بود بازاء $x=a$ و چون این کسر ثانی بازاء $x=a$ مبهم نیست پس اگر متصل باشد حدش محققاً همان مقداری خواهد بود که بازاء $x=a$ اختیار میکند پس بموجب قضیه مزبوره این حد عبارتست از مقدار حقیقی کسر مفروض

مثال. کسر $\frac{x^2+3x}{x^3-x}$ بازاء $x=0$ بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ نموده میشود و چون این کسر مساویست با کسر $\frac{x+3}{x^2-1}$ بازاء جمیع مقادیر x مگر بازاء $x=a$ پس بنا بر قضایای نمره ۴۴۱ چنین نتیجه میشود

$$\text{حد}\left(\frac{x^2+3x}{x^3-x}\right)_{x=0} = \text{حد}\left(\frac{x+3}{x^2-1}\right)_{x=0} = -3$$

پس مقدار حقیقی کسر مفروض بازاء $x=0$ مساویست با -3

۴۴۱ — قضیه ۱ — حد حاصل جمع جبری چند معرف از x که هر یک دارای حدی باشد وقتیکه x میل کند بسمت صفر مساویست با مجموع حدود آن جمل

فرض میکنیم سه معرف y و z و u مرتباً دارای حدود b و c و d باشند وقتیکه x میل کند بسمت a میخواهیم ثابت کنیم که حد حاصل جمع $y+z+u$ مساویست با $b+c+d$ چون حدود y و z و u مرتباً مساویند با b و c و d پس بنا بتعریف سابق هرگاه یکعدد مثبت ε قبلاً معلوم باشد میتوان

سه عدد مثبت α' و α'' و α''' بدست آورد چنانکه از نامساویهای $|x-a|<\alpha'$ و $|x-a|<\alpha''$ و $|x-a|<\alpha'''$ بترتیب نامساویهای ذیل نتیجه شود $|y-b|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|z-c|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|u-d|<\frac{\varepsilon}{3}$ و چون کوچکترین عدد α' و α'' و α''' را α فرض کنیم از نامساوی $|x-a|<\alpha$ مستقیماً نامساویهای ذیل نتیجه میشود $|x-a|<\alpha'$ و $|x-a|<\alpha''$ و $|x-a|<\alpha'''$ و بعد سه نامساوی $|y-b|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|z-c|<\frac{\varepsilon}{3}$ و $|u-d|<\frac{\varepsilon}{3}$ و چون این سه نامساوی اخیر را عضو بعضو با یکدیگر جمع کنیم چنین میشود $|y-b|+|z-c|+|u-d|<\varepsilon$

و چون مقدار مطلق هر حاصل جمعی اکثراً مساویست با مجموع مقادیر مطلقهٔ جمل آن پس

$$|y+z+u-(b+c+d)| \leq |y-b|+|z-c|+|u-d|$$

و بعد بازاء جمیع مقادیر x که نامساوی $|x-a|<\alpha$ محقق باشد بطریق اولی چنین خواهیم داشت $|y+z+u-(b+c+d)|<\varepsilon$ پس از اینجا چنین استنباط میشود که حد $(y+z+u)$ مساویست با $(b+c+d)$ حاصل جمع حدود جمل

قضیه ۲ — هرگاه در حاصل ضرب چند عامل یکی از عوامل میل کند بسمت صفر و هر یک از عوامل دیگر بحسب مقدار مطلق کوچکتر از عدد ثابتی باشد حاصل ضرب نیز میل میکند بسمت صفر

فرض میکنیم عامل y مایل بصفر باشد و بنا بفرض چون هر یک از عوامل دیگر بحسب مقدار مطلق

کوچکتر از عدد ثابتی پس حاصل ضربشان بحسب مقدار مطلق کوچکتر خواهد بود از عدد ثابت P و برای اینکه حد حاصل ضرب کل صفر باشد باید اگر چنانچه عدد مثبت ε معلوم شد بتوان یک عدد دیگر α یافت که اگر نامساوی $|x-a|<\alpha$ محقق باشد مقدار مطلق حاصل ضرب کوچکتر شود از ε و این ممکنست زیرا که چون x میل کند بسمت صفر میتوان α را طوری انتخاب نمود که از نامساوی $|x-a|<\alpha$ نامساوی $|y|<\frac{\varepsilon}{P}$ نتیجه شود پس مقدار مطلق حاصل ضرب کل که مساویست با حاصل ضرب مقادیر مطلقهٔ عواملش کوچکتر خواهد بود از

$$P\cdot\frac{\varepsilon}{P}=\varepsilon$$

قضیهٔ ۳ — حد حاصل ضرب چند معرف که هر یک دارای حدی باشد وقتیکه x میل کند بسمت a مساویست با حاصل ضرب حدود عوامل

اولاً فرض میکنیم حاصل ضرب دو عامل y و z را که حدشان بترتیب b و c است وقتیکه x میل کند بسمت a و میخواهیم ثابت کنیم که حد حاصل ضرب yz مساویست با bc کافیست ثابت کنیم که تفاضل $yz-bc$ میل میکند بسمت صفر و برای این چنین مینویسیم $yz-bc=y(z-c)+c(y-b)$ و از اینجا ظاهر است که این تفاضل عبارتست از مجموع دو مقدار $y(z-c)$ و $c(y-b)$ که حد هر یک صفر است چونکه هر یک مرکب است از حاصل ضرب عاملی با کوچکتر از عدد ثابتی

در عامل دیگر که حدش صفر است (قضیه ۲) و بعد بموجب قضیه ۱ حد $(y_1y_2 - bc)$
وقتیکه x میل کند بسمت a مساویست با مجموع حدود جمل آن یعنی صفر لهذا حد
y_1y_2 مساویست با bc حاصل ضرب حدود عواملش

ثانیاً فرض میکنیم چهار معرف y_1 و y_2 و t و u که مرتباً دارای حدود b و c
و d و e باشند وقتیکه x میل کند بسمت a و بنا بر حالت اول حد حاصل ضرب
y_1y_2 مساویست با bc و چون y_1y_2t را حاصل ضرب دو عامل y_1y_2 و t
تصور کنیم و مانند حالت اول استدلال نمائیم حد حاصل ضرب y_1y_2t میشود bcd
و چون بهمین طریق y_1y_2tu را حاصل ضرب دو عامل y_1y_2t و u فرض کنیم حد
این حاصل ضرب عبارتست از حاصل ضرب حدهاند و عامل یعنی $bcde$ و بهمین
طریق میتوان حد حاصل ضرب هر عده از عوامل را معلوم نمود مشروط بر اینکه عده
عوامل محدود باشد

قضیه ۴ — هرگاه صورت کسری میل کند بسمت صفر و مخرجش بحسب مقدار مطلق
بزرگتر از یک عدد ثابتی باشد آن کسر میل میکند بسمت صفر

فرض میکنیم کسر $\frac{y_1}{y_2}$ خارج قسمت دو معرف از x باشد و وقتیکه x میل کند به a
صورت y_1 مایل شود بصفر و اما y_2 بحسب مقدار مطلق بزرگتر از عدد ثابت m باشد

یعنی $m < |y_2|$ و یا $\frac{1}{m} > \left|\frac{1}{y_2}\right|$ و از اینجا ظاهر است که $\frac{1}{y_2}$ کوچکتر است
از عدد ثابتی پس میتوان $\frac{y_1}{y_2}$ را حاصل ضرب دو عامل تصور کرد که یکی مایل بصفر و دیگری
$\frac{1}{y_2}$ محدود باشد بنابراین حد این خارج قسمت صفر است (قضیه ۲)

قضیه ۵ — هرگاه در خارج قسمت دو معرف از x صورت و مخرج دارای
حدی باشند و حد مخرج مخالف صفر باشد حد خارج قسمت مساویست با خارج قسمت حدود

فرض میکنیم $\frac{y_1}{y_2}$ خارج قسمت دو معرف از x باشد و چون x میل کند به a حد
y_1 مساوی b باشد و حد y_2 مساوی c $(c \neq 0)$ میخواهیم ثابت کنیم که حد $\frac{y_1}{y_2}$
مساویست با $\frac{b}{c}$ برای اثبات تفاضل $\frac{b}{c} - \frac{y_1}{y_2}$ را چنین مینویسیم

$$\frac{y_1}{y_2} - \frac{b}{c} = \frac{c(y_1-b) - b(y_2-c)}{cy_2}$$

و از اینجا ظاهر است که این تفاضل
مساویست با خارج قسمت دو مقدار که اولی $c(y_1-b) - b(y_2-c)$ حدش
صفر است وقتیکه x میل کند بسمت a (چونکه مرکبست از حاصل جمع دو مقدار
که هر کدام مایل است بصفر) و دومی cy_2 که حدش مخالف صفر است و بحسب مقدار
مطلق بزرگتر از یک عدد ثابتی پس حد تفاضل $\frac{y_1}{y_2} - \frac{b}{c}$ صفر است (قضیه ۴) یعنی
حد $\frac{y_1}{y_2}$ مساویست با $\frac{b}{c}$

قضیه ۶ — هرگاه معرفی از x دارای حدی باشد (مثبت یا صفر) وقتیکه

x میل کند بسمت a حد جذر این معرف مساویست با جذر حد آن

فرض میکنیم که حد معرف u b باشد وقتیکه x میل کند بسمت a و بازاء مقادیری از x که خیلی نزدیک به a باشد u بعلامت b یعنی مثبت است پس از آن میتوان جذر حسابی استخراج نمود وی از تساوی $\sqrt{u}-\sqrt{b}=\frac{u-b}{\sqrt{u}+\sqrt{b}}$ ظاهر است که تفاضل $\sqrt{u}-\sqrt{b}$ مساویست با کسری که صورتش میل میکند بصفر و مخرجش بزرگتر است از $\sqrt{b}$ پس این تفاضل میل میکند بصفر (قضیهٔ ۴) بنابراین حد $\sqrt{u}$ مساویست با $\sqrt{b}$ وقتیکه x میل کند به a

تبصره — وقتیکه b صفر باشد دلیل فوق صحیح نیست و اگر حد u صفر باشد میتوان η را طوری انتخاب نمود که از نامساوی $|x-a|<\eta$ نامساوی $|u|<\varepsilon^2$ نتیجه شود (ε عددیست مثبت که قبلاً موجود باشد) و آنوقت چنین خواهیم داشت $\sqrt{u}<\varepsilon$ و از اینجا ظاهر است که حد $\sqrt{u}$ صفر است

تنبیه — ما در جمیع قضایای مذکوره فوق فرض کردیم که معرفات مفروضه مایل بحدشان باشند وقتیکه x میل کند به a و اگر فرض کنیم که x بنهایت ترقی کند باز این قضایا محقق خواهند بود

۴۴۲ — قضیهٔ ۱ — هرگاه در حاصل جمع چند جمله فقط یک جمله بنهایت ترقی کند

و جمل دیگر بحسب مقدار مطلق کوچکتر از اعداد ثابته باشند حاصل جمع مفروض نیز بنهایت ترقی میکند

فرض میکنیم آن جمله که بنهایت ترقی میکند u باشد و حاصل جمع جبری جمل دیگر را v مینامیم و چون بفرض جمیع جمل v معلوم و محدود هستند پس v نیز معلوم و محدود خواهد بود و میتوان عدد مثبت A بدست آورد که v بحسب قدر مطلق از آن تجاوز نکند ولی چون $|u+v|>|u|-|v|$ (قضیهٔ ۱) پس اگر عدد η طوری انتخاب کنیم که بازاء نامساوی $|x-a|<\eta$ این نامساوی نتیجه شود $|u|>A+P$ (P عددیست مثبت و معلوم) بطریق اولی این نامساوی نیز محقق خواهد بود $|u+v|>A+P-A$ یا $|u+v|>P$ پس $u+v$ بنهایت ترقی میکند وقتیکه x میل کند بسمت a

تبصره — قضیهٔ فوق محقق نگردد مگر وقتیکه فقط یکی از جمل حاصل جمع مفروض بنهایت ترقی کند والا نمیتوان هیچ حکمی نمود جز آنکه جمیع جملیکه ترقی میکنند بیک علامت باشند و در چنین حالت باز حاصل جمع بنهایت ترقی میکند مثلاً تفاضل دو عدد مثبت که هر دو بنهایت ترقی کنند نمیتواند دارای یک حد معین باشد چنانچه $\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x}$ همواره مساویست با ۱ مع ذلک وقتیکه

x میل کند بصفر هر یک از جمل بینهایت ترقی میکند و در اینصورت حالت ابهام رخ میدهد که آنرا باین رمز $\infty - \infty$ مینمائیم

قضیهٔ ۲ — هرگاه در حاصل ضرب چند عامل یکی از آن عوامل بینهایت ترقی کند و هر یک از عوامل دیگر بحسب مقدار مطلق بزرگتر از یکعدد ثابتی باشد حاصل ضرب بینهایت ترقی میکند

فرض میکنیم آن عاملی که بینهایت ترقی میکند y باشد وقتیکه x میل کند به a و حاصل ضرب جمیع عوامل دیگر را به z مینمائیم و چون هر یک از عوامل z بزرگتر از عدد ثابتی پس میتوان یکعدد مثبت η بدست آورد که مقدار مطلق z بزرگتر باشد از η و علاوه بر این چون y بینهایت ترقی میکند پس اگر یکعدد مثبت A در دست باشد میتوان یکعدد مثبت دیگر α تعیین نمود که اگر نامساوی $|x-a|<\alpha$ محقق باشد چنین نتیجه شود $|y| > \frac{A}{\eta}$ و چون $|z| > \eta$ پس بازاء همان مقادیر x چنین خواهیم نوشت $|yz| > A$ بنابراین yz بینهایت ترقی میکند وقتیکه x مایل به a باشد

تبصره — هرگاه یکی از عوامل حاصل ضرب میل کند بصفر قضیهٔ مزبوره صحیح نیست چونکه حاصل ضرب هر عامل که بینهایت ترقی کند در عامل دیگر که مایل بصفر باشد

مبهم است باین صورت $0 \times \infty$

مثلاً حاصل ضرب $x^{p} \times x^{-q}$ توان مثبت x در توان منفی آن وقتیکه x مایل بصفر باشد بصورت ابهام فوق درآید که میتوان آنرا بآسانی رفع نمود زیرا که چون حاصل ضرب را باین صورت بنویسیم x^{p-q} اگر $q<p$ پس $p-q>0$ و در اینجا x^{p-q} و x هر دو میل میکنند بصفر و اگر $q=p$ چنین حاصل میشود $x^{p-q}=1$ و بالاخره اگر $q>p$ پس $p-q<0$ در اینصورت x^{p-q} بینهایت ترقی میکند وقتیکه x مایل بصفر باشد

قضیهٔ ۳ — هرگاه مخرج کسری میل کند بصفر و صورتش بحسب مقدار مطلق بزرگتر از یکعدد ثابتی باشد آن کسر بینهایت ترقی میکند

فرض میکنیم در کسر $\frac{y}{z}$ حد z صفر باشد وقتیکه x میل کند به a و بتوان یکعدد مثبت η بدست آورد که مقدار مطلق y بزرگتر از آن باشد و از طرف دیگر تصور میکنیم یکعدد مثبت A قبلاً موجود باشد و چون z میل کند بسمت صفر میتوان یکعدد دیگر α بدست آورد که از نامساوی $|x-a|<\alpha$ نامساوی ذیل نتیجه شود $|z| < \frac{\eta}{A}$ و چون علاوه بر این $|y| > \eta$ پس بازاء همان مقادیر x چنین خواهیم داشت $\left|\frac{y}{z}\right| > A$ و بنابراین $\frac{y}{z}$ بینهایت ترقی میکند

وقتیکه x مایل به α باشد

تبصره — برای آنکه قضیه فوق صحیح باشد باید صورت کسر مایل بصفر نباشد و الّا کسر بصورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید و ما سابق قاعده رفع این ابهام را در حالات عدیده برشمردیم

نتیجه — عکس هر مقدار مایل بصفر بینهایت ترقی میکند

قضیه ۴ — هرگاه مخرج کسری بینهایت ترقی کند و صورتش بحسب مقدار مطلق کوچکتر از یک عدد ثابتی باشد آن کسر میل میکند بصفر

فرض میکنیم در کسر $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ وقتیکه x میل به α میکند مقدار $\varphi(x)$ محدود باشد و $f(x)$ بینهایت ترقی کند

میخواهیم ثابت کنیم که این کسر میرسد بصفر

یک عدد مثبت A میتوان تعیین نمود که $A > |\varphi(x)|$ و از طرف دیگر فرض میکنیم ε یک عدد مثبت معلوم باشد و چون $f(x)$ بینهایت ترقی کند میتوان یک عدد مثبت η یافت بطوریکه از نامساوی $\eta > |x-\alpha|$ چنین نتیجه شود $\frac{A}{\varepsilon} < |f(x)|$ آنوقت بالبداهه چنین خواهیم داشت $\frac{A}{\frac{A}{\varepsilon}} > \left|\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right|$ یا $\varepsilon > \left|\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right|$ و از اینجا ظاهر است که $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ میل میکند بصفر وقتیکه x مایل به α باشد

نتیجه — هرگاه صورت کسری بینهایت ترقی کند و مخرجش بحسب مقدار مطلق کوچکتر از یک عدد ثابتی باشد این کسر بینهایت ترقی میکند زیرا که عکس این کسر بموجب قضیه

فوق میل میکند بصفر و بعد چون این کسر عکس مقدار مایل بصفر است پس بینهایت ترقی میکند

تبصره — هرگاه دو جمله کسری بینهایت ترقی کند حالت ابهام رخ میدهد باین صورت $\frac{\infty}{\infty}$ مثلاً خارج قسمت $\frac{x^m}{x^p}$ دو قوه مثبته از x بصورت ابهام مزبور درآید وقتیکه x بینهایت ترقی کند ولیکن رفع این ابهام خیلی سهل است زیرا اگر آنرا بصورت x^{m-p} قرار دهیم میتواند بینهایت ترقی کند یا مساوی واحد باشد یا میل کند بصفر بحسب آنکه m بزرگتر یا مساوی p یا کوچکتر از p باشد

تنبیه — جمیع حالات ممکن الوقوع در حاصل جمع و حاصل ضرب و خارج قسمت معرفاتیکه مایل بحدی باشند یا بینهایت ترقی کنند مذکور داشتیم و دیدیم که چهار صورت ابهام $\infty-\infty$ و $0\times\infty$ و $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ممکن است اتفاق افتد در اغلب حالات میتوان این ابهامات را بیکدیگر تبدیل نمود تا رفعشان سهل باشد

مثال ۱ — هر کثیر الجمله صحیح بحسب x که دارای جمله ثابت نباشد میل میکند بصفر وقتیکه x مایل بصفر باشد

چون کثیر الجمله دارای جمله ثابت نیست حد جمیع جمل آن صفر است پس حد خود کثیر الجمله نیز صفر میشود (قضیه نمره ۴۴۱) و بنا بتعریف حد اگر بازاء $x=0$ کثیر الجمله $P(x)$ صفر باشد میتوان یک عدد مثبت η یافت که بازاء جمیع مقادیر x

کو بجب مقدار علق کوچکتر از η باشند این نامساوی نتیجه شود $|P(x)| > \varepsilon$
(ε عددیست مثبت که قبلاً معلوم باشد)

مثال ۲ هر کثیر الجمله صحیح بحسب x بنهایت ترقی میکند وقتیکه x بنهایت ترقی کند و بازاء بزرگترین مقادیر x بعلامت جملهٔ بزرگترین نماینده خواهد بود مثلاً در کثیر الجمله $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ جملهٔ x^4 را عامل مشترک قرار میدهیم $P(x)=x^4\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x^3}+\frac{e}{x^4}\right)$ وقتیکه x بنهایت ترقی کند هر یک از جمل پرانتز میل میکند بصفر مگر جملهٔ اول (نمره ۴۴۲ قضیهٔ ۴) پس حد مقدار داخل پرانتز میشود a (مخالف صفر) و اما عامل اول بنهایت ترقی میکند پس حاصل ضرب $P(x)$ نیز بنهایت ترقی خواهد کرد (نمرهٔ ۴۴۲ قضیهٔ ۲) وعلاوه بر این چون حد مقدار داخل پرانتز a است میتوان x را انقدر بزرگتر گرفت تا اختلاف این مقدار با حدش انقدر جزئی باشد که بخواهیم و بعلامت a باشد لهذا کثیر الجمله بازاء این مقادیر x بعلامت جملهٔ بزرگترین نمایندهٔ ax^4 خواهد بود از آنچه مقدم شد نتیجه چنین میشود که هر کثیر الجمله $P=ax^m+bx^{m-1}+\cdots$ را میتوان بصورت $P=ax^m(1+\varepsilon)$ قرار داد و حد ε صفر است وقتیکه x بنهایت ترقی کند

مثال ۳ معلوم کنید مقدار حقیقی کسر منطق از x را وقتیکه x بنهایت ترقی کند

چون هر کسر منطق بحسب x خارج قسمت دو کثیر الجمله صحیح میباشد پس وقتیکه x بنهایت ترقی کند این کسر بصورت ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ در آید مثلاً فرض میکنیم کسر ذیل را $\frac{P}{Q}=\frac{ax^m+bx^{m-1}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}}$ وچون قرار دهیم $P=ax^m(1+\varepsilon)$ و $Q=a'x^n(1+\varepsilon')$ پس $\frac{P}{Q}=\frac{ax^m}{a'x^n}\times\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}$ (ε و ε' میل میکنند بصفر وقتیکه x بنهایت ترقی کند) $=\frac{ax^m}{a'x^n}(1+\varepsilon'')$ چونکه حد $\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}$ و $(1+\varepsilon'')$ واحد است چنانکه میتوان گفت که ε'' میل میکند بصفر وقتیکه x بنهایت ترقی کند و حال اگر $m>n$ چنین مینویسیم $\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'}x^{m-n}(1+\varepsilon'')$ و اگر $m=n$ پس $\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'}(1+\varepsilon'')$ و اگر $m<n$ چنین قرار میدهیم $\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'x^{n-m}}(1+\varepsilon'')$ و از اینجا چنین استنباط میشود که هرگاه درجهٔ صورت بزرگتر از درجهٔ مخرج باشد کسر بنهایت ترقی میکند وقتیکه x بنهایت ترقی کند و اگر درجات هر دو جمله متساوی باشند حد کسر مخالف صفر است و مساوی با خارج قسمت ضرایب جمله های بزرگترین نمایندهٔ صورت و مخرج و بالاخره اگر درجهٔ صورت کوچکتر از مخرج باشد حد کسر صفر میشود

وعلاوه بر این میتوان حد کسر را نیز بدین طریق معلوم نمود که هر دو جملهٔ آنرا بر بزرگترین قوهٔ x که در یکی از دو جمله موجود باشد قسمت نمود و بعد x را بنهایت ترقی د

و آنوقت هر یک از جمل دارای حدی خواهد بود که کلی اقلاً مخالف صفر باشد
مثلاً کسر $\frac{x^3+x+1}{x^2+1}$ بنهایت ترقی میکند وقتیکه x بنهایت ترقی کند چونکه
درجهٔ صورت بزرگتر است از درجهٔ مخرج و اما حد کسر $\frac{x^4+2x+6}{4x^4+x^2+5}$ مساویست
با $\frac{1}{4}$ چونکه درجات هر دو جمله برابرند

مثال ۴ غالباً برای رفع ابهاماتیکه بصورت $\infty - \infty$ باشد کسر سیون مفروض را
ضرب و قسمت کنند بر مزدوجش

اولاً مقدار حقیقی $x+2-\sqrt{x^2-5x+1}$ را بازاء $x=+\infty$ معلوم کنید چون
آنرا بر مزدوجش قسمت کنیم باینصورت در آید $\frac{9x+3}{x+2+\sqrt{x^2-5x+1}}$ و این کسر جدید
بازاء $x=+\infty$ بصورت $\frac{\infty}{\infty}$ در میآید و چون دو جملهٔ آنرا بر x قسمت کنیم
چنین میشود $\frac{9+\frac{3}{x}}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}$ وقتیکه x بنهایت ترقی کند حد صورت میشود
۹ و حد مخرج $1+\sqrt{1}=2$ پس مقدار حقیقی کسر مفروض مساویست با $\frac{9}{2}$

ثانیاً حد $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$ را معلوم کنید وقتیکه x بحسب مقادیر مثبته ترقی کند
آنرا باین صورت مینویسیم $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$
در این کسر جدید صورت ثابت و مخرج بنهایت ترقی میکند پس حد کسر سیون
مفروض صفر است .

۲ – اتصالات

۴۴۳ – تعریف – معرف $y=f(x)$ را بازاء $x=a$ متصل گوئیم در
صورتیکه اولاً بازاء $x=a$ دارای حد معینی باشد ثانیاً وقتیکه x میل کند به
a حد معرف محققاً همان مقدار باشد که بازاء $x=a$ اختیار کرده است مثلاً
معرف $\sqrt{x}$ بازاء هر مقدار مثبتی از x متصل است زیرا که بازاء $x=a$ دارای
یک مقدار معین $\sqrt{a}$ است و وقتیکه x میل کند به a حد $\sqrt{x}$ میشود $\sqrt{a}$ که
محققاً همان مقداریست که بازاء $x=a$ اختیار کرده است

جمیع قضایائیکه در خصوص حدود مذکور داشتیم نظایرشان جمیعاً در معرفات متصله
موجودند و ما در ذیل اکتفا کنیم فقط باثبات قضیهٔ اول و بذکر احکام قضایای دیگر

۴۴۴ – قضیهٔ ۱ – حاصل جمع جبری چند معرف متصل معرفیست متصل

فرض میکنیم معرفات متصلهٔ y و z و t و u بازاء $x=a$ مرتباً مقادیر
b و c و d و e را اختیار کنند یعنی وقتیکه x میل کند به a معرفات y
و z و t و u برسند بحدودشان b و c و d و e پس (بموجب قضیهٔ نمره ۴۳۱)
حد حاصل جمع $y+z+t+u$ میشود $b+c+d+e$ لهذا $y+z+t+u$
معرفیست متصل بازاء $x=a$

قضیه ۲ — حاصل ضرب چند معرف متصل بازاء $x=a$ معرفیست متصل بازاء $x=a$ (قضیهٔ ۳ نمره ۴۴۱)

نتیجه — هر قوهٔ صحیح و مثبت از معرف متصل معرفیست متصل

مثال ۱ — هر کثیرالجمله صحیح بحسب x عبارتست از مجموع جمله‌ها بصورت Ax^m و هر یک از این جمل معرف متصل است چونکه توقیست از معرف متصل لهذا کثیرالجمله مفروضه نیز متصل خواهد بود

قضیهٔ ۳ — خارج قسمت دو معرف متصل بازاء $x=a$ معرفیست متصل بشرط براینکه بازاء این مقدار $x=a$ مخرج صفر نباشد

زیرا که چون حد مخرج مخالف صفر است میتوان قضیهٔ ۵ را (نمرهٔ ۴۴۱) تطبیق نمود

قضیهٔ ۴ — جذر هر معرف متصل بازاء $x=a$ معرفیست متصل (قضیهٔ ۶ نمرهٔ ۴۴۱)

مثال ۲ — هر کسر منطق بحسب x معرفیست متصل بازاء هر مقداری از x که مخرج آنرا صفر نکند چونکه هر کسر منطق خارج قسمت دو کثیرالجمله صحیح یعنی خارج قسمت دو معرف متصل است پس بنا بر قضیهٔ ۳ کسر مفروض بازاء هر مقداری از x که مخرج را صفر نکند متصل است

مثال ۳ — جذر هر کثیرالجمله صحیح بحسب x معرفیست متصل بازاء هر مقداری از

x که مقدار تحت رادیکال را مثبت کند (قضیهٔ ۴)

امثله — معرفات ذیل متصلند مگر بازاء آن مقادیری از x که مخارج را صفر کنند ویا مقادیر تحت رادیکال را منفی نمایند

ax^2+bx+c و $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ و $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$ و $(x+1)(x+2)(x+3)$ و $\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x^2-2x+1}$

۴۴۵ — تعریف — هرگاه متغیر x از مقدار a تغییر کرده برسد به مقدار a'، $a'-a$ را نمو x نامیم و آنرا چنین نمایش میدهیم $h=a'-a$ یا $a'=h+a$ و چون فرض کنیم y معرفی از x باشد و b و b' دو مقداری از y باشد که بازاء a و a' حاصل شده پس نمو $(a'-a)$ نظیر میشود به $b'-b=K$ نمو معرف و باید ملتفت بود که نمو ممکن است مثبت یا منفی باشد

مثال ۱ — معرف $y=x^2-5x+2$ بازاء $x=3$ میشود $y=-4$ و بازاء $x=2{,}5$ میشود $y=-4{,}25$ پس متغیر میشود $h=2{,}5-3=-0{,}5$ و نمو نظیرش از معرف میشود $K=-4{,}25+4=-0{,}25$

مثال ۲ — در معرف $y=ax^2+bx+c$ چون یک نمو h به x دهیم نمو نظیرش از معرف میشود K پس بازاء مقدار جدید متغیر $x+h$ مقدار نظیرش از معرف

میشود $y+k$ یعنی $y+k=a(x+h)^2+b(x+h)+c$ و بعد

$k=a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c$ یا

$k=h(2ax+b+ah)$

۴۴۶ — قضیه — شرط لازم و کافی برای اینکه معرفی بازاء $x=a$ متصل باشد آنستکه اگر ابتدا از a یک نمو h به x داده شود نمو نظیرش k از معرف میل کند بصفر وقتیکه h مایل بصفر باشد

فرض میکنیم y بازاء $x=a$ مساوی b باشد مقصود از اتصال معرف آنستکه اگر x میل کند به a حد y مساوی شود به b بنابراین $y-b$ یعنی k میل میکند بصفر وقتیکه $x-a$ یعنی h مایل بصفر باشد و بالعکس اگر $h=x-a$ و $k=y-b$ هر دو باهم میل کنند بصفر حد y عدد b خواهد بود وقتیکه x میل کند بصفر و معرف متصل است

حکم این قضیه را میتوان تعریف اتصال قرار داد که هیچ اختلافی با تعریف سابق ندارد و علاوه بر این حقایق اتصال از روی این تعریف بهتر مفهوم میشود زیرا که چون h و k هر دو باهم مایل بصفر شوند میتوان h را آنقدر کوچک گرفت تا k بحسب مقدار مطلق آنقدر کوچک شود که بخواهیم بعبارهٔ اخری وقتیکه معرف بازاء $x=a$ متصل باشد میتوان x را ابتدا از a آنقدر کم و غیر محسوس تغییر داد تا معرف نیز آنقدر کم و غیر محسوس تغییر کند که بخواهیم یعنی معرف نتواند یک مرتبه از مقداری بمقدار دیگر بگذرد ولی

ممکن است معرف بازاء مقداری از x منفصل شود یعنی دارای مقدار معینی نباشد و یا آنکه ناگهان از مقداری بمقدار دیگر بگذرد مثلاً $\frac{1}{x}$ بازاء جمیع مقادیر x متصل است مگر بازاء $x=0$ که یکمرتبه از $-\infty$ میگذرد در $+\infty$ و منفصل میشود

هرگاه معرفی بازاء جمیع مقادیر x محصوره در فاصلهٔ معینی متصل باشد چون بدرجات غیر محسوسه تغییر میکند نمیتواند از مقداری بمقدار دیگر بگذرد بدون سیر جمیع مقادیر متوسطه بنابراین معرف متصل تغییر علامت نکند مگر اینکه از صفر بگذرد زیرا که برای گذشتن از مثبت به منفی باید قهراً صفر شود و بالعکس هر معرفی که شامل انفصالات باشد میتواند از مقداری بمقدار دیگر رسد بدون سیر مقادیر متوسطه

۳ — مشتقات معرفات بسیطه

۴۴۷ — **تعریف** — فرض میکنیم y معرفی از x باشد $y=f(x)$ و چون یک نمو h به متغیر x داده شود معرف نیز یک نمو k حاصل میکند پس اگر نسبت $\frac{k}{h}$ دارای حدی باشد وقتیکه h میل کند بصفر این حد را مشتق معرف نامند

$$\lim\left(\frac{k}{h}\right)=\lim\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

پس مشتق هر معرف عبارتست از حد نسبت نمو معرف به نمو متغیر وقتیکه نمو متغیر میل کند بسمت صفر پس از این تعریف بلا واسطه چنین استنباط میشود که هر معرفی بازاء یکحد

از x مشتق قبول نکند مگر وقتیکه بازاء آن منفصل باشد زیرا که فرض میکنیم A حد $\frac{K}{h}$ باشد
آنرا چنین مینویسیم $\frac{K}{h} = A + \epsilon$ (ϵ با h مایل به صفر) و بعد $K = h(A+\epsilon)$
از اینجا خوب ظاهر است که K میل میکند بصفر وقتیکه h مایل بصفر باشد هرچند این شرط
مزبور لازم است لیکن کافی نیست چون وقتیکه h و K هر دو میل کنند بصفر حالت
ابهام بصورت $\frac{0}{0}$ حاصل میشود چنانکه ممکن است نسبت $\frac{K}{h}$ حد نداشته باشد

(نمرهٔ ۴۴۲ قضیهٔ ۳ تبصره)

امثله ــ مشتق x مساوی است با ۱ زیرا که چون $y = x$ پس $K = h$
و بعد $\frac{K}{h} = 1$ و از اینجا $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = 1$ ($\lim$ علامت حد است)

ثانیاً مشتق $ax + b$ مساوی است با a زیرا که چون $y = ax + b$ پس
$K = a(x+h) + b - ax - b = ah$ و بعد $\frac{K}{h} = a$ و از آنجا $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = a$

ثالثاً مشتق $ax^2 + bx + c$ مساوی است با $2ax + b$ چون $y = ax^2 + bx + c$
پس $K = h[2ax + b + ah]$ و بعد $\frac{K}{h} = 2ax + b + ah$ لهذا وقتیکه h میل کند
بصفر ah نیز مایل گردد بصفر پس $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = 2ax + b$

رابعاً مشتق $\sqrt{x}$ مساوی است با $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشروط براینکه x مخالف صفر باشد
فرض میکنیم $y = \sqrt{x}$ پس $K = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ و بعد $\frac{K}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ و چون h میل کند بصفر $\sqrt{x+h}$ میرسد بحد $\sqrt{x}$ و حد مخرج میشود
$2\sqrt{x}$ پس $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و نسبت $\frac{K}{h}$ بازاء $x = 0$ بینهایت
ترقی میکند وقتیکه h مایل بصفر باشد و در اینحالت میتوان گفت که مشتق $\sqrt{x}$ بازاء
$x = 0$ بینهایت بزرگ است

تبصره ــ مشتق معرف $y = f(x)$ را باین رمز مینمائیم y' یا $f'(x)$ و یا
$(f(x))'$ مشتق $y = ax^2 + bx + c$ چنین نموده میشود $y' = 2ax + b$
و همین طور $(x)' = 1$ و $(\sqrt{x})' = y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

تعریف ــ وقتیکه معرفی بازاء مقداری از x دارای مشتق باشد این مشتق
نیز معرفیست از x که میتواند یک مشتق قبول کند و این مشتقِ مشتق اول را مشتق ثانی
معرفِ مفروض خوانند و همین طور مشتقِ ثانی میتواند یک مشتق قبول کند که آنرا
مشتقِ سوم نامند و هکذا میتوان مشتق چهارم و پنجم بطور کلی مشتق مرتبه n ام معرفی
تعیین نمود و اغلب اتفاق میافتد که مشتقات متوالیه متوقف نباشند یعنی هر مشتقی
همواره یک مشتق قبول کند در اینحالت معرف میتواند مشتقات جمیع مراتب را دارا
باشد و نیز ممکن است مثلاً یکی از مشتقات ثابت باشد آنوقت مشتقات بعد صفر میگردد
مشتق ثانی معرف $y = f(x)$ را چنین مینمائیم y'' یا $f''(x)$ و بطور کلی مشتق

از x مشتق قبول نکند مگر وقتیکه بازاء آن منفصل باشد زیرا که فرض میکنیم A حد $\frac{K}{h}$ باشد

از آن چنین مینویسیم $\frac{K}{h} = A + \varepsilon$ (ε با h مایل به صفر) و بعد $K = h(A+\varepsilon)$

از اینجا خوب ظاهر است که K میل میکند بصفر وقتیکه h مایل بصفر باشد هر چند این شرط

ضروری لازم است لیکن کافی نیست چون وقتیکه h و K هر دو میل کنند بصفر حالت

ابهام بصورت $\frac{0}{0}$ حاصل میشود چنانکه ممکن است نسبت $\frac{K}{h}$ حد نداشته باشد

(نمره ۲۴۲ قضیهٔ ۳ تبصره)

امثله — مشتق x مساوی است با ۱ زیرا که چون $y = x$ پس $K = h$

و بعد $\frac{K}{h} = 1$ و از اینجا $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = 1$ ($\lim$ علامت حد است)

ثانیاً مشتق $ax + b$ مساوی است با a زیرا که چون $y = ax + b$ پس

$K = a(x+h) + b - ax - b = ah$ و بعد $\frac{K}{h} = a$ و از آنجا $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = a$

ثالثاً مشتق $ax^2 + bx + c$ مساوی است با $2ax + b$ چون $y = ax^2 + bx + c$

پس $K = h\left[2ax + b + ah\right]$ و بعد $\frac{K}{h} = 2ax + b + ah$ لهذا وقتیکه h میل کند

بصفر ah نیز مایل گردد بصفر پس $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = 2ax + b$

رابعاً مشتق $\sqrt{x}$ مساوی است با $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ مشروط بر اینکه x مخالف صفر باشد

فرض میکنیم $y = \sqrt{x}$ پس $K = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ و بعد $\frac{K}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$ و چون h میل کند بصفر $\sqrt{x+h}$ میرسد بحد $\sqrt{x}$ و مخرج میشود

$2\sqrt{x}$ پس $\lim\left(\frac{K}{h}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و نسبت $\frac{K}{h}$ بازاء $x = 0$ بنهایت

ترقی میکند وقتیکه h مایل بصفر باشد و در اینحالت میتوان گفت که مشتق $\sqrt{x}$ بازاء

$x = 0$ بنهایت بزرگ است

تبصره — مشتق معرف $y = f(x)$ را باین رمز مینمایانیم y' یا $f'(x)$ و یا

$(f(x))'$ مشتق $y = ax^2 + bx + c$ چنین نموده میشود $y' = 2ax + b$

و همین طور $(x)' = 1$ و $(\sqrt{x})' = y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

تعریف — وقتیکه معرفی بازاء مقداری از x دارای مشتق باشد این مشتق نیز معرفیست از x که میتواند یک مشتق قبول کند و این مشتقِ مشتق اول را مشتق ثانی معرف مفروض خوانند و همین طور مشتقِ ثانی میتواند یک مشتق قبول کند که آنرا مشتق سوم نامند و بکذا میتوان مشتق چهارم و پنجم بطور کلی مشتق مرتبه n ام معرفی تعیین نمود و اغلب اتفاق میافتد که مشتقات متوالیه متوقف نباشند یعنی هر مشتقی همواره یک مشتق قبول کند در اینحالت معرف میتواند مشتقات جمیع مراتب را دارا باشد و نیز ممکن است مثلاً یکی از مشتقات ثابت باشد آنوقت مشتقات بعد صفر میگردد

مشتق ثانی معرف $y = f(x)$ را چنین مینمایانیم y'' یا $f''(x)$ و بطور کلی مشتق

مرتبهٔ n چنین نموده میشود $y^{(n)}$ یا $f^{(n)}(x)$

امثله - اولاً مشتقات متوالیهٔ معرف $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

از قرار $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ و $y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c$

و $y''' = 24ax + 6b$ و $y^{IV} = 24a$ ثانیاً مشتق اول و دوم معرف

$y = ax^2 + bx + c$ عبارتند از $y' = 2ax + b$ و $y'' = 2a$ ثالثاً

مشتق اول و دوم معرف $\sqrt{x}$ عبارتند از $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و $(\sqrt{x})'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

۴۴۸ - قضیهٔ ۱ - مشتق هر مقدار ثابت مساویست با صفر زیرا که اگر فرض کنیم y معرفی از x ثابت باشد یعنی همواره دارای یک مقدار ثابت و معین باشد نمو Δy از معرف که نظیر است بیک نمو غیر مشخص Δx از x همواره صفر است پس $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ $(\Delta x \neq 0)$ و بعد $y' = \lim\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 0$

۴۴۹ - قضیهٔ ۲ - مشتق حاصل جمع چند معرف که هر کدام دارای مشتق باشد مساویست با مجموع مشتق آن معرفات

فرض میکنیم u و v و w معرفی از x باشند و u' و v' و w' مشتقاتشان بازاء x میخواهیم ثابت کنیم که مشتق حاصل جمع $y = u + v + w$ عبارتست از $y' = u' + v' + w'$ هرگاه یک نمو Δx به x داده شود u و v و w نیز نموات

Δu و Δv و Δw حاصل میکنند یعنی بازاء $x + \Delta x$ مقادیر این سه معرف چنین میشود $u + \Delta u$ و $v + \Delta v$ و $w + \Delta w$ و بعد مقدار y چنین خواهد شد $u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w$ پس نمو y نظیر نمو Δx عبارتست از $\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w - (u + v + w)$

و یا $\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w$ پس $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}$ ولی وقتیکه Δx میل کند بصفر $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ میرسند بحدودشان u' و v' و w' پس از اینجا چنین استنباط کنیم (قضیهٔ نمرهٔ ۴۴۱) که حد حاصل جمع این نسب یعنی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مساویست با حاصل جمع حدود آنها پس مشتق مطلوب چنین میشود $y' = u' + v' + w'$

۴۵۰ - قضیهٔ ۳ - مشتق حاصل ضرب چند معرف که هریک دارای مشتق باشد مساویست با حاصل جمع حواصل ضروب حاصله از تبدیل هریک از معرفات مفروضه بمشتقاتشان در حاصل ضرب معرفات مفروضه

اولاً فرض میکنیم u و v دو معرف از x باشند و u' و v' مشتقاتشان میخواهیم ثابت کنیم که مشتق حاصل ضرب $y = uv$ عبارتست از $y' = u'v + uv'$

هرگاه یک نمو Δx به x داده شود u و v نیز نموات Δu و Δv حاصل میکنند یعنی بازاء $x + \Delta x$ مقادیر u و v چنین میشود $u + \Delta u$ و $v + \Delta v$ و حاصل

ضربشان $(v+\Delta v)(u+\Delta u)$ پس نمو حاصل ضرب y بتغییر Δx چنین میشود

$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv$ یا $\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u.\Delta v$

و چون طرفین را بر Δx قسمت کنیم حاصل شود $\frac{\Delta y}{\Delta x}=u.\frac{\Delta v}{\Delta x}+v.\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$

وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ بفرض میرسند بحدشان u' و v'

و بعد حد $u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$ و $v.\frac{\Delta u}{\Delta x}$ چنین میشود uv' و vu' و اما جملهٔ سوم $\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}$

مرکبست از دو عامل که حد اولی v' و دومی مایل است بصفر پس حد اینجمله میشود صفر

و حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ حاصل جمع سه جمله که هر کدام دارای حدیست مساوی شود با مجموع حدود

آن جمل پس مشتق مطلوب چنین میشود $y'=uv'+vu'$

ثانیاً وقتیکه قضیه در دو عامل ثابت شد در چند عامل نیز بسهولت مبرهن میشود مثلاً

فرض میکنیم u و v و w سه معروف از x باشند و u' و v' و w' مشتقاتشان

و بموجب حالت اول مشتق حاصل ضرب uv مساویست با $u'v+uv'$

ولیکن حاصل ضرب مفروض را میتوان چنین قرار داد $y=u.v.w=(uv)w$

و چون هر کدام از این دو عامل دارای مشتق است پس بموجب قاعده فوق مشتق حاصل

ضربشان چنین میشود $y'=(uv)'w+(uv)w'$ و چون بجای $(uv)'$ مساویش را قرار

دهیم حاصل میشود $y'=u'vw+uv'w+uvw'$ پس وقتیکه قضیه در سه عامل ثابت شد در

چهار عامل نیز مبرهن میشود در صورتیکه حاصل ضرب چهار عامل $uvwt$ را

حاصل ضرب دو عامل $(uvw)t$ تصور کنیم و قاعدهٔ مبرهنه در دو عامل را

جاری سازیم و همچنین این قضیه را میتوان عمومیت داد و در هر چند عامل که بخواهیم اثبات نمود

نتیجه ١ — مشتق حاصل ضرب معروف در مقدار ثابتی مساویست با حاصل ضرب

مشتق معروف در مقدار ثابت زیرا که چون مشتق هر مقدار ثابت صفر است بموجب

قاعدهٔ مذکورهٔ فوق حاصل میشود $(Af(x))'=Af'(x)$

نتیجه ٢ — هرگاه معروفی دارای مشتق باشد هر قوهٔ صحیح و مثبتی از این معروف

دارای مشتقی است که حاصل شود از اینکه آن قوه را در نمایندهٔ اش ضرب کنیم و بعد

یکواحد از نماینده بکاهیم و حاصل را در مشتق معروف ضرب نمائیم $(u^m)'=mu^{m-1}\times u'$

زیرا که چون u^m (m صحیح و مثبت است) حاصل ضرب m عوامل مساوی با u است

بنابر قضیهٔ فوق مشتقش مساویست با حاصل جمع m حواصل ضرب دیگر از تبدیل هر عامل بمشتقش

بتدریج حاصل شوند و چون هر دفعه که بجای هر عامل u مشتقش را قرار دهیم هر کدام از

حواصل ضروب مرکب باشد از $(m-1)$ عامل مساوی با u و یک عامل u' پس مشتق

u^m مساویست با حاصل جمع m جمل متساویهٔ $u^{m-1}\times u'$ یعنی $(u^m)'=mu^{m-1}\times u'$

٤٥١ — قضیهٔ ٤ — هرگاه دو معروف دارای مشتق باشند خارج قسمتشان نیز

مشتق خواهد داشت مشروط بر اینکه مخرج مخالف صفر باشد و این مشتق مساویست با کسری که صورتش فضل حاصل ضرب مشتق صورت در مخرج بر حاصل ضرب مشتق مخرج در صورت باشد و مخرجش مجذور مخرج بعبارة اخری اگر u' و v' مشتقات دو معرف u و v باشند مشتق خارج قسمت $\frac{u}{v} = y$ چنین میشود $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

چون به x یک نمو Δx داده شود نموات u و v میشوند Δu و Δv و بنا بر این مقدار $x + \Delta x$ مقدار خارج قسمت $\frac{u}{v}$ چنین میشود $\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$ پس نمو خارج قسمت نظیر نمو Δx چنین خواهد بود $\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$ یا $\Delta y = \frac{\Delta u . v - \Delta v . u}{(v + \Delta v)v}$ و چون طرفین را بر Δx قسمت کنیم حاصل میشود $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} . v - \frac{\Delta v}{\Delta x} . u}{(v + \Delta v)v}$ دقیقه که Δx میل کند بصفر Δv نیز متمایل شود بصفر پس حد $v + \Delta v$ میشود v و حد مخرج کسر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مخالف صفر مساویست با v^2 و علاوه بر این حد $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ و $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ بفرض عبارتند از u' و v' پس حد صورت میشود $u'v - v'u$ لهذا حد خارج قسمت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ چنین خواهد بود $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

نتیجه — مشتق هر قوه صحیح و منفی از معرفیکه دارای مشتق باشد بموافق همان قاعده معموله در تعیین مشتق قوه مثبت بدست میآید (قضیه ۳ نتیجه ۲)

زیرا که چون قرار دهیم $\frac{1}{u^m} = u^{-m}$ بموجب قضیه فوق چنین حاصل میشود

$$(u^{-m})' = \frac{-(u^m)'}{u^{2m}} = -\frac{m.u^{m-1}.u'}{u^{2m}} = -\frac{m u'}{u^{m+1}}$$

و از آنجا $(u^{-m})' = -m.u^{-m-1} \times u'$

۴۵۲ — قضیه ۵ — هرگاه معرفی دارای مشتق باشد جذرش نیز مشتق خواهد داشت مشروط بر اینکه معرف مخالف صفر باشد و این مشتق مساویست با خارج قسمت مشتق معرف بر ضعف جذر آن مثلاً $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u \neq 0)$ فرض میکنیم Δu نظیر نمو Δx باشد پس نمو $y = \sqrt{u}$ چنین میشود $\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$ یا $\Delta y = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$ و چون بر Δx قسمت کنیم حاصل میشود $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$ دقیقه که Δx میل کند بسمت صفر Δu نیز مایل شود بصفر و $\sqrt{u + \Delta u}$ میرسد بحد $\sqrt{u}$ پس حد مخرج مخالف صفر مساویست با $2\sqrt{u}$ و علاوه بر این چون حد $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ بفرض مساویست با u' پس حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ چنین میشود $y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

تبصره — کلیه $y = \sqrt[m]{u}$ را باین صورت بنویسیم $y^m = u$ و از طرفین مشتق میگیریم $u' = y' \times y^{m-1} m$ و از آنجا $y' = \frac{u'}{m y^{m-1}} = \frac{u'}{m(\sqrt[m]{u})^{m-1}}$

۴۵۳ — مشتق x^m مساویست با $m x^{m-1}$ (m عدد صحیح و مثبت یا منفی)

زیرا که بموجب نتایج قضایای ۳ و ۴ مشتق x^m مساویست با حاصل ضرب x^{m-1} در مشتق x که واحد است مثلاً $(x^2)' = 2x$ و $(x^3)' = 3x^2$ و

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ و $\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

۴۵۴ – **مشتق کثیرالجمله صحیح** – هر کثیرالجمله صحیح بحسب x عبارتست از حاصل جمع چند جمله بصورت Ax^m و مشتق Ax^m مساویست با حاصل ضرب A در مشتق x^m یعنی Amx^{m-1} و مشتق جمله ثابت صفر است لهذا مشتق هر کثیرالجمله مساویست با حاصل جمع مشتقات هر یک از جمل و از اینجا چنین نتیجه میشود که بجهت تعیین مشتق هر کثیرالجمله باید هر جمله آنرا در نماینده x ضرب کرد و بعد از نماینده x یک واحد نقصان نمود این قاعده در جمله ثابت نیز جاریست در صورتیکه نماینده x را در آنجمله صفر فرض کنیم

امثله

$(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

$(ax^3+bx^2+cx+d)' = 3ax^2+2bx+c$

$(x^4-3x^2+x)' = 4x^3-6x+1$

$(x^6-5x^4+3x^2+7)' = 6x^5-20x^3+6x$

چون خواهیم از کثیرالجمله درجه m ام مشتق اختیار کنیم در هر جمله یک واحد از نمای x کاسته میشود بطوریکه کثیرالجمله مشتق مرتبه p مثلاً از درجه $(m-p)$ خواهد بود و مخصوصاً کثیرالجمله مشتق مرتبه m از درجه $(m-m)$ صفر است یعنی مقداریست ثابت و مشتقات مراتب مابعد صفر میشوند مثلاً مشتقات متوالیه کثیرالجمله $y = ax^3+bx^2+cx+d$ از قرار ذیلست $y' = 3ax^2+2bx+c$ ، $y'' = 6ax+2b$ ، $y''' = 6a$ ، $y^{IV} = 0$ و هکذا

۴۵۵ – **مشتق کسر منطق** – چون هر کسر منطق عبارتست از خارج قسمت دو کثیرالجمله

پس مشتق آنرا از روی دستور قضیه ۴ (نمره ۴۵۱) حساب میکنیم

امثله $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ و

$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)' = \frac{a(a'x+b')-a'(ax+b)}{(a'x+b')^2} = \frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$

$\left(\frac{2x+1}{x^2+x-1}\right)' = \frac{2(x^2+x-1)-(2x+1)^2}{(x^2+x-1)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

$\left(\frac{x^2-5x+6}{2x^2+3x+7}\right)' = \frac{(2x-5)(2x^2+3x+7)-(4x+3)(x^2-5x+6)}{(2x^2+3x+7)^2}$

$= \frac{13x^2-10x-53}{(2x^2+3x+7)^2}$

$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \frac{(ab'-ba')x^2+2(ac'-ca')x+(bc'-cb')}{(a'x^2+b'x+c')^2}$

و برای تعیین مشتق کسر $y = \frac{\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}}{x^2}$ ابتدا آنرا بصورت مختصر در آوریم $y = \frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{x^2(x^2-1)}$ و یا $y = \frac{2x^2+2}{x^4-x^2}$ و بعد مشتق آنرا بگیریم $y' = \frac{-4x^5-8x^3+4x}{(x^4-x^2)^2}$ و یا $y' = \frac{4x(1-2x^2-x^4)}{x^4(x^2-1)}$

۴۵۶ – **مشتقات کسر سونهای اصم** – مثال ۱ – مشتق $y=\sqrt{x}$ چنین میشود $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ و مشتق ثانی $y'' = -\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{x})'}{x}$ و چون بجای $(\sqrt{x})'$ مقدار آنرا قرار دهیم حاصل میشود $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ و همینطور y''' را حساب میکنیم $y''' = \frac{1}{4}\frac{(x\sqrt{x})'}{x^3}$ ولی $(x\sqrt{x})' = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$ پس $y''' = \frac{3}{8x^3\sqrt{x}}$

مثال ۲ – $y = \sqrt[4]{x}$ و یا $y = \sqrt{\sqrt{x}}$ پس $y' = \frac{(\sqrt{x})'}{2\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt[4]{x}}$

و یا $y' = \frac{1}{4\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

مثال ۳ – $\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$

مثال ۴ – $\left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right]' = \frac{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})(x-\sqrt{x^2-1})}{2x\sqrt{x}\,(x^2-1)}$

مشتقات معرفات مستدیره

۴۵۷ – اتصال معرفات مستدیره – معرفات مستدیره عبارتند از $\sin x$ و $\cos x$ و $\operatorname{tg} x$ و $\operatorname{cotg} x$ و $\sec x$ و $\operatorname{cosec} x$ خطوط مثلثاتی قوس x و برای اثبات اتصال این معرفات ابتدا باید ثابت کرد که جیب هر قوس مایل باشد بصفر وقتیکه آن قوس میل کند بسمت صفر فرض میکنیم O مرکز دایرهٔ مثلثاتی بشعاع واحد شود و A مبدء قوسها و Ox محور جیوب تمام و Oy محور جیوب عمود بر Ox پس جیب قوس $\overset{\frown}{AM} = x$ بنا بتعریف عبارتست از قطعه خط $\overline{OP}$ درصورتیکه P تصویر قائم نقطهٔ M باشد بر Oy و پس از این مقدمه فرض میکنیم عدد مثبت ε قبلاً معلوم باشد و از طرفین O دو طول OK و OK' را مساوی ε بر Oy نقل میکنیم و از K و K' دو خط موازیه با Ox رسم مینمائیم تا نیم دایره $B'AB$ را در H و H' قطع کنند و فرض میکنیم α مقدار مشترک دو قوس

مساوی AH و AH' باشد و واضحست که اگر قوس $\overset{\frown}{AM}$ بحسب مقدار کوچکتر از α باشد انتهایش M خواهد افتاد مابین H و H' و بعد نقطه P تصویر M بر Oy مابین K و K' واقع گردد و مقدار مطلق قطعه $\overline{OP}$ کوچکتر شود از ε بعبارة اخری اگر نامساوی $|x|<\alpha$ محقق باشد نامساوی $|\sin x|<\varepsilon$ نیز محقق خواهد بود پس معلوم شد که جیب میل میکند بصفر وقتیکه قوس x مایل بصفر باشد

اولاً – اتصال $\sin x$ – چون یک نمو h به x داده شود نمو $\sin x$ چنین میشود $K=\sin(x+h)-\sin x$ یا $K=2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ وقتیکه h میل کند بسمت صفر $\sin\left(\frac{h}{2}\right)$ نیز مایل شود بصفر و $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ محدود و محصور باشد مابین ۱– و ۱+ پس K حاصل ضرب دو عامل نیز میل کند بصفر

ثانیاً – اتصال $\cos x$ – فرض میکنیم h نمو x باشد و K نمو نظیرش از $\cos x$ پس $K=\cos(x+h)-\cos x$ یا $K=-2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$ وقتیکه h میل کند بسمت صفر $\sin\left(\frac{h}{2}\right)$ مایل شود بصفر و $\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$ محدود باشد پس K نیز میل کند بصفر

ثالثاً – چون $\sin x$ و $\cos x$ معرفات متصله اند پس بواسطه حسن استنباط میکنیم که سایر معرفات مستدیره نیز متصلند بازاء آنمقادیری از x که این معرفات دارای معنا-

پیوسته باشند زیرا که معرفات $tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و $cotg\,x=\frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ و $cosec\,x=\frac{1}{\sin x}$ بموجب قضیهٔ ۳ (نمرهٔ ۴۴۵) بازاء جمیع مقادیری از x که مخارج را صفر نکنند متصل میباشند

۴۵۸ – حکم – نسبت جیب هر قوس بآنقوس میل میکند بواحد وقتیکه آن قوس مایل بصفر باشد

فرض میکنیم دایرهٔ مثلثاتی O و قوس $\widehat{AM}=x$ مثبت باشد و $\overline{MP}$ جیب و $\overline{AT}$ ظل آنقوس باشد و چون مساحت دو مثلث OAM و OAT و قطاع OAM را با یکدیگر بسنجیم این نامساوی حاصل میشود

مثلث OAM < قطاع OAM < مثلث OAT و یا

$$\frac{1}{2}OA\times MP < \frac{1}{2}OA\times \widehat{AM} < \frac{1}{2}OA\times AT$$

یا بعد

$$MP < \widehat{AM} < AT$$

$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ و چون طرفین نامساوی را بر $\sin x$ قسمت کنیم حاصل میشود

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ اینک وقتیکه x میل کند بسمت صفر $\cos x$ مایل شود به ۱ و $\frac{x}{\sin x}$ محدود و محصور باشد مابین ۱ و مقداری که حدش ۱ است لهذا حد $\frac{x}{\sin x}$ مساویست با ۱ وقتیکه x بجانب مقادیر مثبته میل کند بصفر و اگر قوس x منفی باشد حکم فوق باز محقق است

۴۵۹ – مشتق $\sin x$ مساویست با $\cos x$ – چون به x نمو h دهیم نمو $\sin x$ چنین میشود $k=\sin(x+h)-\sin x=2\sin(\frac{h}{2})\cos(x+\frac{h}{2})$ پس $\frac{k}{h}=\frac{\sin(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})}\cos(x+\frac{h}{2})$ وقتیکه h میل کند بصفر حد خارج قسمت $\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}$ میشود ۱ و حد $\cos(x+\frac{h}{2})$ میشود $\cos x$ و از آنجا

$$\lim\left(\frac{k}{h}\right)=1\times\cos x=\cos x$$

۴۶۰ – مشتق $\cos x$ مساویست با $(-\sin x)$ – فرض میکنیم نمو x h باشد نمو نظیرش از $\cos x$ چنین میشود $k=\cos(x+h)-\cos x=-2\sin(\frac{h}{2})\sin(x+\frac{h}{2})$

$\frac{k}{h}=-\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\cdot\sin(x+\frac{h}{2})$ وقتیکه h میل کند بصفر حد $\frac{k}{h}$ چنین میشود $\lim(\frac{k}{h})=1\times\sin x=-\sin x$

۴۶۱ – مشتق $tg\,x$ مساویست با $\frac{1}{\cos^2 x}$ هرگاه h نمو x باشد نمو $tg\,x$ چنین میشود $k=tg(x+h)-tg\,x=\frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x}$

پس بازاء هر مقداری از x که $\cos x$ را صفر نکند چنین خواهیم داشت $\frac{k}{h}=\frac{\sin h}{h}\times\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$ وقتیکه h میل کند بصفر حد $\frac{k}{h}$ چنین میشود

$$\lim\left(\frac{k}{h}\right)=1\times\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

تبصره – وقتیکه مشتق $\cos x$ و $\sin x$ معلوم باشند میتوان مشتق $tg\,x$

$(\operatorname{tg} x)'$ را از روی قاعده مشتق خارج قسمت حساب نمود از این قرار: $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$= \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

و بهمین طریق میتوان مشتقات خطوط مثلثاتی دیگر را نیز حساب کرد

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{و} \quad (\operatorname{cosec} x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

۵ — مشتق معرف معرفات

۴۶۲ — فرض میکنیم y معرفی از متغیر u باشد $y = f(u)$ و خود u نیز معرفی از متغیر x $u = \varphi(x)$ پس میتوان $y = f(u)$ را معرفی از x تصور نمود بتوسط u و آنرا معرفِ معرف x نامید مثلاً $\sqrt{x^2+1}$ را میتوان معرفِ معرف x فرض نمود زیرا که چون قرار دهیم $x^2+1 = u$ پس $\sqrt{u} = \sqrt{x^2+1}$ و همینطور $\sin(\sqrt{x})$ معرفِ معرف x است

قضیه — هرگاه معرف u از x و معرف $f(u)$ از u دارای مشتقات u' و $f'(u)$ باشند مشتق معرفِ معرف $f(u)$ از x مساویست با حاصل ضرب $u' \cdot f'(u)$

چون معرفِ معرف $f(u)$ از x را y فرض کنیم $y = f(u)$ و وقتیکه متغیر x نمو Δx حاصل کند نمو u میشود Δu و نمو معرف y میشود Δy پس بالبداهه چنین نتیجه میشود

$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u)$ زیرا که بازاء $x + \Delta x$ مقدار u میشود $u + \Delta u$

و بعد $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta x}$ و یا باین صورت نوشته میشود

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ وقتیکه Δx میل کند بصفر $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ بفرض میرسد بحد مشتق u' و چون Δu میل کند بصفر $\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}$ نیز بفرض میرسد بحد مشتق $f'(u)$ پس حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یعنی مشتق y نسبت به x مساوی است با حاصل ضرب حدود دو عامل $u' \cdot f'(u)$ و یا بصورت $y'_x = y'_u \times u'_x$

یعنی مشتق y نسبت بمتغیر x مساویست با حاصل ضرب مشتق y نسبت به u در مشتق u نسبت به x

مثال ۱ — $y = u^m$ را میتوان معرف معرف فرض نمود پس $y'_x = (u^m)' = m u^{m-1} \times u'$

مثال ۲ — مشتق $y = \sin u$ چنین میشود $y' = \cos u \cdot u'$ و چون فرض کنیم $u = \sqrt{x}$ پس $u' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ و بعد $y'_x = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sin(\sqrt{x}))'$

مثال ۳ — $y = 3\sin(5x^2+3x+1)$ چون قرار دهیم $u = 5x^2+3x+1$

پس $y = 3\sin u$ و بعد $y'_u = 3\cos u \cdot u'$ و از آنجا $u' = 10x+3$

پس $y' = [3\cos(5x^2+3x+1)](10x+3)$

مثال ۴ — $y = \cos 2x$ چون فرض کنیم $u = 2x$ پس $y = \cos u$ و بعد

$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \sin u \times u'_x = -2\sin 2x$

مسئله ۵ – حساب کنید مشتق $y = \sin u$ را در صورتیکه $x = \cos u$ (۱) پس ابتدا چنین خواهیم داشت $y' = \cos u . u'$ و برای محاسبه u' از طرفین تساوی (۱) مشتق بگیریم

$1 = -\sin u . u'$ و از آنجا $u' = \frac{1}{-\sin u}$ پس $y' = -\frac{\cos u}{\sin u} = -\cot u$

مسئله ۶ – فرض میکنیم $y = \sin\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)$ پس $y' = \cos\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$

مسئله ۷ – $y = \sqrt{1-\sin^2 x}$ پس $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-\sin^2 x}}(1-\sin^2 x)'$ و چون

$(1-\sin^2 x)' = -2\sin x(\sin x)' = -2\sin x . \cos x$ پس $y' = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

مسئله ۸ – فرض میکنیم $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ و چون $u = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ پس $y = \sqrt{u}$

و از آنجا $y' = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \times \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

۴۶۳ – دیفرانسیل هر معرف عبارتست از حاصل ضرب مشتق این معرف در نمو مقدار متغیر x مثلاً دیفرانسیل معرف y از روی این تعریف مساویست با حاصل ضرب $y'.\Delta x$ که در آن Δx نمویست از x (مخالف صفر) دیفرانسیل y را باین رمز نمایش میدهیم dy پس

$$dy = y'.\Delta x$$

قضیه – دیفرانسیل مقدار متغیر x مساویست با نمو آن Δx زیرا که بنا بتعریف دیفرانسیل x مساویست با حاصل ضرب مشتق x که واحد است در نمو Δx پس

$dx = 1 \times \Delta x = \Delta x$

نتیجه – دیفرانسیل هر معرف مساویست با حاصل ضرب مشتق معرف در دیفرانسیل مقدار متغیر زیرا که بنا بتعریف $dy = y'.\Delta x$ و چون $\Delta x = dx$ پس $dy = y'dx$

و علاوه براین چون $y' = \frac{dy}{dx}$ پس از اینجا طریق جدیدی برای نمایش مشتق حاصل میشود

تبصره – فرض میکنیم y معرفی از x باشد مشتق y' مساویست با حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتیکه Δx میل کند بصفر پس چنین مینویسیم $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \epsilon$ (ϵ و Δx باید بصفر)

و بعد $\Delta y = y'\Delta x + \epsilon.\Delta x$ و از اینجا ظاهر است که Δy حاصل جمع دو جمله است که اولی $y'.\Delta x$ عبارتست از دیفرانسیل dy و دومی $\epsilon.\Delta x$ که سر میل Δx میرسد بصفر چونکه حاصل ضرب Δx است در ϵ که مقداریست قریب بصفر بعبارة اخری وقتیکه Δx خیلی کوچک باشد ϵ نیز خیلی کوچک میشود بنابراین Δy اختلافی با dy ندارد جز در مقداریکه نسبتش به dy آنقدر کوچک و ناقابل است که بخواهیم و فرض کنیم صفر باشد و خطای ترکیبه از اختیار کردن dy بجای مقدار تقریبی Δy ممکن است آنقدر کوچکتر شود که بخواهیم مشروط براینکه Δx را بقدر کفایت کوچک انتخاب کرده باشیم و خطای نسبی مساویست با $\frac{\epsilon}{y'}$ پس از این تحقیقات چنین استنباط میشود که در محاسبات عملیه مثلاً در فیزیک میتوان همواره دیفرانسیل dy و نمو Δy

را بجای یکدیگر استعمال نمود و ما در آنچه ذکر شد فرض کردیم که h مخالف صفر
باشد و الا $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نیز صفر میشود و آنوقت $\Delta y = \varepsilon \Delta x$ یعنی نمو Δy نسبت به Δx
بسیار کوچک میشود و تغییر y نسبت به x بسیار جزئی و ناقابل است

فصل بیست و سوم

استعمال مشتقات در تغییر معرفات

۴۶۴ - **تعاریف** - معرف را در فاصلهٔ معینی صعودی گوئیم در صورتیکه
با متغیر در یک جهت تغییر کند بعبارهٔ اخری معرف $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) صعودی است
اگر چنانچه دو عدد غیر مشخص α و β در این فاصله محصور باشند خارج قسمت
$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ مثبت باشد

معرف را در فاصلهٔ معینی نزولی گوئیم در صورتیکه در خلاف جهت متغیر تغییر کند
بعبارهٔ اخری معرف $f(x)$ در فاصلهٔ (a, b) نزولی است اگر چنانچه دو عدد
غیر مشخص α و β در آن فاصله محصور باشند خارج قسمت $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ منفی باشد.

قضیهٔ رول (Rolle) - هرگاه معرف معین و متصل $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر
x محصوره در فاصلهٔ (a, b) دارای مشتق باشد و علاوه بر این بازاء
$x = a$ و $x = b$ مقدار متساوی اختیار کند پس اقلاً یک مقدار c از متغیر

x محصوره در فاصلهٔ مفروضه یافت میشود که بازاء آن مشتق صفر میشود

چون بنا بفرض $f(a) = f(b)$ پس وقتیکه x از a تا b تغییر کند اگر چنانچه
معرف ثابت باشد مشتقش بازاء جمیع مقادیر x صفر میشود (قضیهٔ ۱ نمرهٔ ۴۲۸)
و بعد بازاء هر مقدار c محصور ما بین a و b نیز صفر خواهد شد

و اما وقتیکه x از a تا b تغییر کند معرف همواره ثابت نباشد محققاً مقادیری اختیار
خواهد کرد که از $f(a)$ بزرگترند یا کوچکتر مثلاً فرض میکنیم بزرگتر از $f(a)$ باشند و چون
معرف معین و محدود فرض شده پس محققاً بمقداری خواهد رسید که بزرگتر از جمیع
مقادیر دیگر باشد یا اقلاً مقداری که از آن نتواند تجاوز نمود بنا بر این فرض میکنیم
c عددی باشد ما بین a و b بطوریکه اگر x از a تا b تغییر کند نتواند مقادیری
بزرگتر از $f(c)$ اختیار کند لهذا چنین خواهیم داشت $f(c+h) - f(c) \leq 0$ و
$f(c-h) - f(c) \leq 0$ h عددی است مثبت و بقدری کوچک که $c-h$ و $c+h$
محصور باشند ما بین a و b پس $\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$ و
$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$ و اما وقتیکه h میل کند بصفر دو نسبت $\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ و
$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ هر دو متمایل شوند بسمت حد مشترک $f'(c)$ و چون
این دو نسبت مختلفة العلامه اند پس حد مشترکشان صفر است یعنی $f'(c) = 0$

قضیه (نموات محدوده) هرگاه معرف محدود و متصل $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر x محصوره مابین a و b دارای مشتق باشد میتوان یکعدد c مابین a و b یافت چنانکه این تساوی محقق شود

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

چون خارج قسمت $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ را به A بنامیم پس $f(b)-f(a)=(b-a)A$ یا $f(b)-bA=f(a)-aA$ (۱) و بعد ملاحظه میکنیم معرف $\varphi(x)$ ذیل را $\varphi(x)=f(x)-Ax$ این معرف محدود و متصل است و بازاء جمیع مقادیر x محصوره مابین a و b دارای مشتق است چونکه تفاضل دو معرف از همین جنس میباشد و مشتقش عبارت است از $\varphi'(x)=f'(x)-A$ ولی از تساوی (۱) چنین استنباط میشود $\varphi(b)=\varphi(a)$ پس بنا بر قضیه رول یکعدد c مابین a و b یافت میشود چنانکه $\varphi'(c)=0$ یعنی $f'(c)-A=0$ یا $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو المطلوب

قضیه ۱ (عکس قضیه نمره ۴۴۸) — هرگاه مشتق معرف $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر محصوره مابین a و b صفر باشد این معرف در فاصله (a,b) ثابت است

بجهت اثبات این قضیه کافیست که ثابت کنیم که اگر α و β دو عدد غیر مشخص محصور

مابین a و b باشند باید چنین حاصل شود $f(\alpha)=f(\beta)$

بموجب قضیه نموات محدوده میتوان یکعدد γ مابین α و β و بعد مابین a و b یافت که این تساوی محقق باشد $f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)f'(\gamma)$

ولی بنا بفرض $f'(\gamma)=0$ پس $f(\alpha)-f(\beta)=0$

قضیه ۲ — هرگاه معرف $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر x محصوره در فاصله (a,b) دارای مشتق باشد اولاً اگر بازاء جمیع مقادیر این فاصله مشتق مثبت باشد معرف در این فاصله صعودیست ثانیاً اگر بازاء جمیع مقادیر این فاصله مشتق منفی باشد معرف در این فاصله نزولی است

کافیست که ثابت کنیم که اگر دو عدد غیر مشخص α و β در فاصله (a,b) اختیار کنیم باید چنین حاصل شود $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}>0$ وقتیکه مشتق مثبت باشد

چون بموجب قضیه نموات محدوده این تساوی محقق است $f'(\gamma)=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ (γ عددیست محصور مابین α و β و بعد مابین a و b) و بفرض $f'(\gamma)$ مثبت است پس $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ نیز مثبت خواهد بود یعنی $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}>0$.

و بهمین طور از تساوی فوق ظاهر است که اگر $f'(\gamma)$ منفی باشد چنین حاصل میشود $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<0$ و معرف نزولی است

عکس قضیهٔ ۲ — هرگاه معرف $f(x)$ بازاء جمیع مقادیر x محصوره در فاصله (a, b) دارای مشتق باشد اولاً اگر معرف در این فاصله صعودی باشد مشتقش بازاء جمیع مقادیر این فاصله مثبت است یا صفر ثانیاً اگر معرف در این فاصله نزولی باشد مشتقش منفی است یا صفر

فرض میکنیم α عددی باشد محصور ما بین a و b و همچنین h عددی آنقدر کوچک که $(\alpha + h)$ نیز محصور باشد در فاصله (a, b) پس اگر معرف در این فاصله صعودی باشد بنا بتعریف باید چنین حاصل شود $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} > 0$ ولی وقتیکه h میل کند بصفر خارج قسمت $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ بفرض میرسد بحد خودش $f'(\alpha)$ و چون این خارج قسمت همواره مثبت است پس حدش $f'(\alpha)$ نیز مثبت خواهد بود یا صفر

و اگر معرف نزولی باشد مشابه همین طریق ثابت میکنیم

تبصره — باید ملتفت بود که در حالت مزبور مشتق باید بازاء مقادیر منفرده x صفر باشد زیرا که اگر در یک فاصله بسیار کوچکی ما بین (a, b) همواره صفر شود لازم میآید که معرف در این فاصله ثابت باشد

۴۶۵ — **تعاریف** — اولاً معرف را بازاء $x = a$ ماگزیما نامند هرگاه بتوان یک عدد مثبت ε یافت که مقدار معرف بازاء $x = a$ بزرگتر باشد از جمیع

مقادیر دیگری که بازاء مقادیر x محصوره ما بین $(a - \varepsilon)$ و $(a + \varepsilon)$ حاصل کند و مقدار معرف را بازاء $x = a$ ماگزیموم معرف نامند

ثانیاً معرف را بازاء $x = a$ مینیما نامند هرگاه بتوان یک عدد مثبت ε یافت که مقدار معرف بازاء $x = a$ کوچکتر شود از جمیع مقادیر دیگری که بازاء مقادیر x محصوره ما بین $(a - \varepsilon)$ و $(a + \varepsilon)$ اختیار کند و مقدار معرف را بازاء $x = a$ مینیموم این معرف نامند

کلیه این دو تعریف را میتوان چنین ادا نمود معرف را بازاء $x = a$ ماگزیما یا مینیما نامند وقتیکه مقدار آن بازاء $x = a$ بزرگتر یا کوچکتر باشد از جمیع مقادیر مجاوره

قضیه — هرگاه معرفی بازاء $x = a$ ماگزیما یا مینیما باشد مشتقش بازاء $x = a$ صفر است

وقتیکه معرف بازاء $x = a$ ماگزیما باشد پس $f(a-h)$ کوچکتر میشود از $f(a)$ وقتیکه h مثبت و کوچکتر از ε باشد پس چنین حاصل میشود

$f(a-h) - f(a) < 0$ و بعد $\frac{f(a-h)-f(a)}{-h} > 0$

و موافق همان شرایط مزبوره $(\varepsilon > h > 0)$ برخلاف چنین حاصل میشود

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ پس وقتیکه h میل کند بصفر دو خارج قسمت

$f'(a)$ بفرض حد مشترکشان میشود $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ و $\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

وچون این دو رابطه مختلفة العلامه اند پس حد مشترکشان $f'(a)$ قهراً صفر میشود $f'(a)=0$

واگر معرف مینیما باشد بهمین وجه ثابت میکنیم

بالعکس — هرگاه مشتق در حین گذشتن از علامت (+) بعلامت (−) صفر شود وقتیکه x بگذرد به a معرف بازاء $x=a$ ماگزیماست زیرا که چون مشتق از a تا $(a-\epsilon)$ مثبت است پس معرف صعودی است (قضیهٔ ۱) وچون مشتق از a تا $(a+\epsilon)$ منفی است پس معرف بازاء $x=a$ نزولی است (قضیهٔ ۲) وهمچنین هرگاه مشتق در حین گذشتن از علامت (−) بعلامت (+) صفر شود وقتیکه x بگذرد به a معرف بازاء $x=a$ مینیماست

تبصره — مشتق معرفی همچنانکه ذکر شد صفر میشود وقتیکه معرف ماگزیما یا مینیما باشد ولیکن ممکن است اتفاق افتد که مشتق در فاصله که معرف صعودی یا نزولی باشد صفر گردد مع ذلک معرف نه ماگزیما باشد و نه مینیما مثلاً چون معرف $(x-a)^3$ را ملاحظه کنیم مشتقش میشود $3(x-a)^2$ و این مشتق همواره مثبت است مگر بازاء $x=a$ صفر میشود مع ذلک معرف بازاء $x=a$ نه ماگزیماست و نه مینیما چونکه از $-\infty$ تا a و از a تا $+\infty$ صعودیست پس همواره از $-\infty$ تا $+\infty$ صعودی میشود پس تشخیص حالت ماگزیموم و مینیموم

یست که مشتق صفر شود و تغییر علامت چنانچه در مثال فوق مشتق بازاء $x=a$ صفر شود بدون تغییر علامت چونکه بازاء هر مقداری از x که مخالف a باشد همواره مثبت است

۶۰۴ — تعبیر هندسی مشتق — قضیه — هرگاه معرف $y=f(x)$ بازاء $x=x_0$ دارای مشتق باشد و تغییر این معرف را به منحنی نمائیم و از نقطه که ابسیسش x_0 باشد خطی بر آن منحنی مماس کنیم ضریب زاویهٔ این خط مماس مساویست با مشتق معرف بازاء $x=x_0$

ابتدا بخاطر میآوریم تعریف خط مماس را و فرض میکنیم C یک منحنی باشد و M نقطه از این منحنی و یک نقطهٔ دیگر M' روی منحنی اختیار میکنیم که خیلی نزدیک به M باشد و MM' را وصل میکنیم پس وقتیکه M' در روی منحنی سیر کند و منتهایت نزدیک شود بر M و بر آن منطبق گردد و خط MM' میل کند بیک حد MT که آن را مماس بر منحنی گوئیم در نقطهٔ M

(۶۰۸)

پس از اینمقدمه فرض میکنیم منحنی C نمایش تغییر معرف $y = f(x)$ باشد و نقطهٔ M از
منحنی که آبسیس x_0 و اردونه‌اش y_0 باشد و چون یک نمو h به x بدهیم
نمو نظیرش از y میشود K پس فرض میکنیم M' نقطهٔ دیگر از منحنی باشد مختصاتش $x = x_0 + h$
و $y = y_0 + K$ و بعد MM' را وصل میکنیم و ابتدا مقدار ضریب زاویهٔ آنرا معلوم کنیم
و چون ضریب زاویهٔ این خط را به a و اردونه‌اش از مبدا را به b بنامیم معادلهٔ
این خط چنین میشود $y = ax + b$ (رجوع کنید بدرجهٔ اول) و چون دو نقطهٔ
M و M' واقعند در روی این خط پس مختصاتشان در معادلهٔ آن صدق میکنند یعنی
$y_0 = ax_0 + b$ و $y_0 + K = a(x_0 + h) + b$ و پس از اسقاط تساوی اول از
تساوی ثانی حاصل میشود $K = ah$ یا $a = \frac{K}{h}$ پس ضریب زاویهٔ خط MM'
مساویست با $\frac{K}{h}$ ولی وقتیکه h و K میل کنند بصفر نقطهٔ M' بمنتهای نزدیک
میشود به M و بفرض $\frac{K}{h}$ ضریب زاویهٔ خط میرسد بحدش y'_0 که عبارتست از مشتق
y بازاء $x = x_0$ پس از اینجا چنین نتیجه میشود که وقتیکه نقطهٔ M' بمنتهای نزدیک میشود
به M خط MM' میرسد بحدش مماس MT که ضریب زاویهٔ این خط مماس مساویست
با y'_0 یعنی بعدد مشتق معرف بازاء $x = x_0$

و ما سابق مذکور داشته‌ایم که ضریب زاویهٔ خطی مساویست با ظل مثلثاتی زاویهٔ حادثه

(۶۰۹)

مابین این خط و امتداد مثبت محور ox پس هرگاه زاویهٔ $\widehat{xMT}$ حادثه مابین
محور x ها و خط مماس بر منحنی در نقطهٔ M را α فرض کنیم این تساوی حاصل میشود

$\operatorname{tg}\alpha = y'_0$ که حد ضریب زاویهٔ α است

نتیجه ۱ — وقتیکه معرفی ماکزیما یا مینیما باشد و مشتق قبول کند خط مماس بر
منحنی در نقطهٔ ماکزیموم یا مینیموم موازی میشود با ox زیرا که چون مشتق در آن نقطه
صفر است پس ضریب زاویهٔ خط مماس نیز صفر میشود و خط مماس موازی میشود با محور x ها

نتیجه ۲ — هرگاه مشتق معرفی بمنتهای بزرگ باشد خط مماس بر منحنی موازی میشود با محور
y ها چون وقتیکه ضریب زاویهٔ خط مماس بمنتهای بزرگ باشد این خط موازی
میشود با محور y ها

قضیهٔ مذکورهٔ فوق بسیار مفید است و باستعانت آن میتوان در هر نقطهٔ از منحنی یک خط
مماس رسم نمود و ترسیم منحنی بسیار صحیح و دقیق خواهد بود

۴۶۷ — طریقهٔ تعیین تغییر معرف — بجهت تعیین تغییر معرفی ابتدا شروع
میکنیم بیافتن فواصلیکه باید x در آن تغییر داد تا معرف دارای مقادیر محدود و متصل
باشد و بعد مشتق معرف را (اگر موجود باشد) حساب میکنیم و در فواصل فوق
مقادیری از معرف بدست میآوریم که بازاء آنها مشتق صفر یا بمنتهای بزرگ باشد

و این مقادیر مخصوصهٔ x را بترتیب صعودی مرتب کرده فواصل متوالیه تشکیل میدهیم که در هر یک از آنها علامت مشتق ثابت باشد و جهت معرف از روی علامت مشتق معلوم گردد و بعد مقادیر مخصوصهٔ معرف را از قبیل ماکزیما و مینیما و بازاء $x=\pm\infty$ حساب میکنیم و بالاخره منحنی نمایش معرف را رسم میکنیم و برای صحت و دقت منحنی بهتر آنست که مقدار y را بازاء $x=0$ یعنی نقطهٔ تقاطع منحنی را با محور y ها را معلوم نمود و اگر ممکن شود مقادیر x را بازاء $y=0$ یعنی نقاط تلاقی منحنی را با محور x ها.

۴۶۸ — معرف خطی $y=ax+b$ این معرف بازاء $-\frac{b}{a}$ صفر میشود و مشتقش $y'=a$ ثابت است پس اگر $a>0$ معرف دائماً صعودیست و اگر $a<0$ معرف نزولی است و نمایشش خط مستقیم است (رجوع کنید بدرجهٔ اول)

۴۶۹ — $y=ax^2+bx+c$ — مشتق این معرف عبارت است از $y'=2ax+b$ که بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ صفر میشود اولاً اگر $a>0$ از نامساوی $2ax+b<0$ چنین حاصل میشود $x<-\frac{b}{2a}$ پس وقتیکه $x<-\frac{b}{2a}$ در این حالت $y'<0$ و معرف y نزولی است و وقتیکه $x>-\frac{b}{2a}$ در اینحالت $y'>0$ و معرف صعودی و بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ مینیمم است ثانیاً اگر $a<0$ از نامساوی $2ax+b<0$ چنین حاصل میشود $x>-\frac{b}{2a}$ پس وقتیکه $x>-\frac{b}{2a}$ در این حالت

$y'<0$ و y صعودی است وقتیکه $x<-\frac{b}{2a}$ در اینحالت $y'>0$ و معرف نزولی و بازاء $x=-\frac{b}{2a}$ ماکزیمم است (نمرهٔ ۳۳۳)

مثال — میخواهیم تغییر معرف $y=3+4x-x^2$ را معلوم کنیم این معرف بازاء هر مقداری از x متصل و محدود است و مشتقش مساویست به $y'=4-2x$ که بازاء $x=2$ تغییر علامت کند و وقتی که x از $-\infty$ تا ۲ ترقی کند مشتق مثبت و معرف از $-\infty$ تا ماکزیمم ۷ صعودی است و چون x از ۲ تا $+\infty$ ترقی کند مشتق منفی و معرف از ۷ تا $-\infty$ نزولی است چونکه بازاء $x=\pm\infty$ معرف بنهایت بزرگ و بعلامت $-x^2$ است

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	↗	۷	↘	$-\infty$

و نمایش این معرف عبارتست از قطع مکافی (نمرهٔ ۳۳۶) که قطع میکند محور y ها را در نقطه ($x=0$, $y=3$) و محور x ها را در دو نقطهٔ $x=2\pm\sqrt{7}$

۴۷۰ — $y=ax^4+bx^2+c$ این معرف بازاء هر مقداری از x متصل و مشتقش مساویست به $4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$ دو ایجاد و حالت میتوان منظور داشت بحسب اینکه a و b متحد العلامه یا مختلف العلامه باشند و ما [illegible]

میکیم فقط بذکر حالتیکه a مثبت باشد (وقتیکه a منفی باشد نیز بهمین وجه بحث میکنیم)

اولاً $b>0$ درانیحالت مشتق فقط بازاء $x=0$ صفر میشود و حامل $2ax^2+b$ همواره مثبت و y بازاء $x=\pm\infty$ بعلامت ax^4 یعنی مثبت خواهد بود پس وقتیکه x از $-\infty$ تا 0 ترقی کند مشتق منفی و y از $+\infty$ تا c (مینیموم مطلق) نزول میکند و چون x از 0 تا $+\infty$ ترقی کند y جمیع مقادیر سابق را برخلاف ترتیب فوق اختیار کرده از c تا $+\infty$ صعود میکند و نمایشش قطع مکافی تقریبی که محورش oy باشد (اما حقیقةً شکل قطع مکافی نیست) و ممکن است این منحنی محور x ها را قطع کند یا نکند بحسب آنکه y دارای ریشه باشد یا نباشد یعنی c منفی یا مثبت باشد

ثانیاً $b<0$ درانیحالت مشتق بازاء سه مقدار مختلفهٔ x یعنی $x=0$ و $x=\pm\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ صفر میگردد و چون x از $-\infty$ تا $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ ترقی کند مشتق منفی و معرف y از $+\infty$ تا $\frac{4ac-b^2}{4a}$ (مینیموم مطلق) تنزل کند و چون x از $-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$ تا 0 ترقی کند مشتق مثبت و y از $\frac{4ac-b^2}{4a}$ تا c (ماکزیموم نسبی) صعود کند و چون x ابتدا از 0 ترقی کند معرف باز همان مقادیر سابقه را برخلاف ترتیب فوق مجدداً اختیار میکند (رجوع کنید بجدول ذیل)

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-b}{2a}}$		0		$+\sqrt{\frac{-b}{2a}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	c	$\searrow$	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

منحنی این معرف مرکب باشد از دو شاخهٔ ABC و $A'B'C$ که نسبت به oy قرینه‌اند و خطوط مماس در نقاط B و C و B' موازی میشود با محور x ها و بحسب مقادیر عددیهٔ a و b و c ممکن است منحنی محور x ها را قطع نکند و یا در دو نقطه یا ۴ نقطه تلاقی کند زیرا وقتیکه $\frac{b}{a}$ منفی باشد y می تواند بحسب حالات مختلفه دارای ۰ یا ۲ یا ۴ ریشه باشد

۴۷۱ — کسر درجهٔ اول $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ که در آن a' اصلاً مخالف صفر است ولی a میتواند صفر باشد این معرف بازاء $x=\frac{-b'}{a'}$ که مخرج را صفر کند بینهایت بزرگ است یعنی منفصل میشود و مشتقش عبارت است از $y'=\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}$ و چون مخرج همواره مثبت است پس علامت مشتق همواره ثابت خواهد بود و معرف همواره در یکجهت

تغییر میکند و حالا اگر $ab'-ba'>0$ معرف صعودی است و اگر $ab'-ba'<0$ معرف نزولی است و حد معرف بازاء $x=\pm\infty$ مساویست به $\frac{a}{a'}$ پس دو جدول ذیل تشکیل میگردد

$ab'-ba'<0$		
x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$-$	
$-\frac{b'}{a'}$		$-\infty$ / $+\infty$
	$-$	
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

$ab'-ba'>0$		
x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$+$	
$-\frac{b'}{a'}$		$+\infty$ / $-\infty$
	$+$	
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

از ... مساوی $\frac{a}{a'}$ یعنی ... دارد B خط RBR' را موازی ox رسم ...

بجهت نمایش معرف دو محور متعامده رسم میکنیم و در روی ox نقطهٔ A را که آبسیسش بحسب علامت و مقدار مساوی $-\frac{b'}{a'}$ باشد معین میکنیم و از آن نقطه خط A را موازی oy رسم میکنیم و در روی oy نقطهٔ B را که ...

خطی را مماس ازلی بر شاخهٔ از منحنی غیر محدود گوئیم در صورتیکه یک نقطهٔ M از این شاخه اختیار کنیم فاصله اش از آن خط میل کند بسمت صفر وقتیکه نقطهٔ M در روی این شاخه بنهایت دور شود

پس از این مقدمه هرگاه x دارای یک مقدار منفی و بحسب مقدار مطلق بنهایت بزرگ باشد مقدار y بنهایت نزدیک شود به $\frac{a}{a'}$ پس قوس MD از

منحنی تشکیل شود که خط RR' مماس ازلی آن باشد و چون x بحسب مقادیر مثبت میل کند بسمت $-\frac{b'}{a'}$ شاخهٔ منحنی از یسار و فوق مماس ازلی گردد با ... و حال اگر x بحسب مقادیر بزرگتر ابتدا از $-\frac{b'}{a'}$ ترقی کند یک شاخهٔ دیگر منحنی مماس ازلی شود از یمین و تحت بر همان خط ... و چون x بنهایت ترقی کند این شاخه مماس ازلی شود بر خط RR' پس شکل ۱ و ۲ نمایش تغییرات معرف است وقتیکه $ab'-ba'>0$ و شکل ۱ مطابق حالتی است که $-\frac{b}{a}$ بزرگتر از $-\frac{b'}{a'}$ باشد و شکل ۲ موافق حالتیکه $-\frac{b}{a}$ کوچکتر از $-\frac{b'}{a'}$ باشد و اگر $ab'-ba'<0$ تغییرات معرف بشکل ۳ و ۴ نموده میشود

(۱) (۲) (۳) (۴)

و جمیع این منحنیات اشکال هذلولی (قطع زائد) میباشند

تبصره — هرگاه $ab'-ba'=0$ در اینصورت y' همواره صفر است

و معرف همواره ثابت میگردد زیراکه از تساوی $ab' = ba'$ حاصل میشود $\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$

فرض میکنیم K مقدار مشترک این نسبت باشد یعنی $K = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$ پس

$a = Ka'$ و $b = Kb'$ و بعد $y = \frac{Ka'x + Kb'}{a'x + b'} = \frac{K(a'x + b')}{a'x + b'}$

و پس از اختصار میشود $y = K$ پس معرف همواره ثابت است و در اینحالت تغییرات

بدو خط A و $R'AR$ نموده میشوند که معادلاتشان بترتیب عبارتند از

$x = \frac{-b'}{a'}$ و $K = \frac{a}{a'}$ و مجموع این دو خط راستوان بمنزله هذلولی

یکی از اشکال فوق تصور نمود که منجر شده باشد به مماسهای ازلیه شان

۴۷۲ – تغییر کسر منطق درجه دوم $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ که در آن

a و b و c و a' و b' و c' مقادیر معلومه اند و ما بوسیله امثله عددیه مخصوصی

اکتفا میکنیم بذکر تغییرات حالات عمده

مثال ۱ – معلوم کنید تغییرات معرف ذیل را $y = \frac{4x^2 - 1}{4(x^2 - x)}$

y معرف اتصالی است بازاء جمیع مقادیر x مگر بازاء $x = 0$ و $x = 1$

و مشتق چنین میشود $y' = \frac{-4x^2 + 2x - 1}{4(x^2 - x)^2}$ و چون مشتق بازاء

$x = 0$ و $x = 1$ منفصل است پس جدول تغییرات بواسطه اعداد ۰ و ۱

منقسم میشود بر سه جزء و از طرف دیگر مشتق در فواصل اتصالات دائما منفی است

پس معرف دائما نزولی است و وقتیکه x بحسب مقدار مطلق بینهایت بزرگ باشد

حد y میشود ۲ پس جدول ذیل تشکیل میگردد

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y	2	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	2
y'		−		−		−		−		−	

و این تغییرات را بمنحنی مینمائیم

مثال ۲ – فرض میکنیم این کسر را $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$

معرف مشتقش $y' = \frac{2(x^2 + x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$

بازاء جمیع مقادیر x متصل هستند و مشتق بازاء دو مقدار $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

و $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ صفر میشود پس بازاء جمیع مقادیر x محصوره مابین x_1 و x_2

منفی و بازاء جمیع مقادیر واقعه در خارجه آنها مثبت میشود مقدار x_1 نظیر است

به ماکزیموم $y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و x_2 نظیر مینیموم $y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ و بازاء مقدار مطلق

بینهایت بزرگ x حد y میشود ۱ و علاوه بر این بازاء مقادیر ۰ و ۲ معرف y صفر میشود پس جدول ذیل تشکیل میگردد

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		2		$+\infty$
y	1	↗	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	↘	0	↘	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	↗	0	↗	1
y'		+	0	−		−	0	+		+	

منحنی نمایش این معرف دارای یک مماس ازلی است موازی با محور x ها ($y=1$)
و قطع میکند این مماس را در نقطهٔ $x=-\frac{1}{2}$ و برای یافتن این مقدار باید چنین قرار
داد و بعد معادلهٔ حاصله بحسب x را حل نمود

مثال ۳ – فرض میکنیم
این کسر را $y=\frac{x^2-2x}{x-1}$
این معرف بازاء هر مقداری از
x اتصالی مگر بازاء $x=1$ که مخرج را صفر میکند و مشتقش چنین می شود
$y'=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$ صورت این مشتق چون ریشه ندارد پس مشتق همواره
مثبت و معرف همواره صعودی است و چون x از $-\infty$ تا 1 ترقی
کند y از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند چون وقتیکه x بجانب مقادیر کوچکتر
میل کند به 1 y بمقادیر مثبتهٔ بینهایت ترقی میکند و وقتیکه x رسید به 1 y
ناگهان از $+\infty$ جستن کند به $-\infty$ چونکه مخرج کسر تغییر علامات میکند بالاخره
چون x از 1 تا $+\infty$ ترقی کند y از $-\infty$ تا $+\infty$ ترقی میکند

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$+\infty$

بجهت ترسیم منحنی ابتدا ثابت میکنیم که یک مماس ازلی موجود است که معادله‌اش
چنین باشد $y=x-1$ بصورت y را بر مخرجش قسمت میکنیم و y را بصورت
ذیل مینویسیم $y=x-1-\frac{1}{x-1}$ و خط AB را میسازیم که معادله‌اش
این است $y=x-1$ و فرض میکنیم M نقطهٔ از منحنی باشد با آبسیس x و M'
نقطهٔ از خط که دارای همان آبسیس باشد پس قطعهٔ خط MM' مساوی است با تفاضل اردونهٔ
نقطهٔ خط بر اردونهٔ نقطهٔ منحنی
یعنی $\overline{MM'}=\overline{PM'}-\overline{PM}$
و بنابراین $\overline{MM'}=\frac{1}{x-1}$
و چون x بینهایت ترقی کند MM'
میل میکند بصفر پس خط AB مماس ازلی است
بر منحنی و علاوه براین بواسطهٔ علامت $\overline{MM'}$ وضع نسبی نقاط M و M' معلوم
میگردد زیراکه بازاء $x=\pm\infty$ قطعهٔ خط MM' مثبت است پس M'
در فوق M و منحنی در تحت مماس ازلی واقع میگردد بازاء $x=-\infty$ قطعهٔ خط
MM' منفی است پس M' در تحت M و منحنی در فوق مماس ازلی واقع میگردد
بنابراین ترسیم منحنی خیلی سهل میشود بدین طریق چون x از $-\infty$ تا 1–

ترقی کند یک شاخه از منحنی احداث میگردد که از A بر خط AB مماس ازلی گشته صعود میکند و مماس ازلی میگردد بر خط دیگر CD که معادله اش این است $x = 1$ و چون x رسد به ١ منحنی یکمرتبه مماس ازلی شود بر CD و چون x از ١ تا $+\infty$ ترقی کند منحنی صعود میکند و مجدداً مماس ازلی شود بر AB پس یک منحنی مرکب از دو شاخه تشکیل میگردد (هذلولی)

تبصره — کسر مذکوره فوق مثال مخصوصی است از کسریکه بصورت کلی $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ باشد ($a \neq 0$ ، $a' \neq 0$) و این معرف دارای یک مماس ازلی است که نسبت به محورها مایل است و برای یافتن این مماس ازلی باید صورت کسر را بر مخرجش قسمت نمود و بعد چون y را مساوی جزو صحیح خارج قسمت کنیم معادله خط مماس ازلی تشکیل میگردد مثلاً فرض میکنیم $\alpha x + \beta$ خارج قسمت $ax^2 + bx + c$ باشد بر $a'x + b'$ و R باقی مانده تقسیم (که ثابت است) پس $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} = \alpha x + \beta + \frac{R}{a'x + b'}$ و از اینجا ظاهر است که تفاضل مابین اردونه نقطه M از منحنی و نقطه M' از خط $Y = \alpha x + \beta$ که همان ابسیس باشد مساویست با $\frac{R}{\alpha x + \beta}$ و چون x بی نهایت ترقی کند این تفاضل

میل میکند به صفر پس منحنی مماس ازلی گردد بر این خط

مثال ۴ — فرض میکنیم این کسر را $y = \frac{2x^2 - x - 1}{6x^2 - 3x}$ مشتقش میشود $y' = \frac{4x - 1}{3(2x^2 - x)^2}$ و بازاء هر مقداری از x معروف و مشتق اتصالی هستند مگر بازاء $x = \frac{1}{2}$ و مشتق فقط بازاء $x = \frac{1}{4}$ صفر میشود چنانچه بازاء مقادیری بزرگتر از $\frac{1}{4}$ مثبت و بازاء مقداری کوچکتر از $\frac{1}{4}$ منفی است لهذا معرف بازاء $x = \frac{1}{4}$ میرسد به ماکزیموم ٣ و علاوه بر این صورت کسر بازاء $-\frac{1}{2}$ و ١ صفر میشود پس جدول ذیل تشکیل میگردد و منحنی معرف را نیز رسم میکنیم

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y	$\frac{1}{3}$ ↘	0	$-\infty$ | $+\infty$ ↘	3 ↗	$+\infty$ | $-\infty$	0 ↗	$\frac{1}{3}$
y'	$-$	$-$	| $-$	0	$+$ | $+$	$+$	

۴۷۳ — تغییرات معرف $y = x^3 + px + q$ که در آن p و q مقادیر معلوم اند و مشتقش میشود $y' = 3x^2 + p$ پس در حالت عمده میتوان منظور داشت بحسب اگر p مثبت یا منفی باشد معرف و مشتقش همواره اتصالی هستند

حالت اول فرض میکنیم $p > 0$ مشتق همواره مثبت و معرف همواره صعودی است و چون
x بحسب مقدار مطلق بینهایت بزرگ باشد مقدار مطلق y نیز بینهایت بزرگ و بعلامت
x^3 میباشد پس جدول ذیل تشکیل میگردد

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$
y'		$+$	

و در نمایش منحنی فقط اکتفا میکنیم
برسم محور x ها و از روی شکل ظاهر است
که منحنی محور x ها را فقط در یک نقطه
تلاقی میکند پس در اینحالت معادله
$x^3 + px + q = 0$ فقط دارای یک ریشه است

حالت دوم — فرض میکنیم $p < 0$ پس مشتق بازاء دو مقدار متساویه مختلفة العلامة
یعنی $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ صفر میشود و جدول تغییرات ذیل تشکیل میگردد

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	y_1	↘	y_2	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

پس معرف دارای یک ماکزیموم $y_1 = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$ و یک مینیموم
$y_2 = +\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q$ است وقتیکه ماکزیموم و مینیموم هر دو منفی یا هر دو مثبت یا
اولی مثبت و دومی منفی باشد سه منحنی تغییرات بشکل ذیل نموده میشود

و چون در حالت اول و دوم ماکزیموم و مینیموم بیک علامتند پس حاصل ضربشان
$q^2 + \frac{4p^3}{27}$ مثبت است و در حالت سوم حاصل ضربشان منفی است
و در دو حالت اول منحنی فقط در یک نقطه محور x ها را قطع میکند پس معادله
$x^3 + px + q = 0$ دارای یک ریشه است و در حالت سوم چون منحنی
محور x ها را در سه نقطه تلاقی میکند پس معادله (۳) دارای سه ریشه است
و در حالت مخصوص که مقدار ماکزیموم و مینیموم صفر باشد منحنی مماس میشود بر محور x ها

و باید دانست که شرط لازم و کافی برای اینکه معادله (۳) دارای سه ریشه متمایز
باشد اینست $4p^3 + 27q^2 < 0$ (۴)

و اگر $4p^3 + 27q^2 = 0$ باز معادله دارای سه ریشه است یعنی
یک ریشه مضاعف $\frac{-3q}{2p}$ و یک ریشه بسیط $\frac{3q}{p}$

مثلاً دو معرف $y_1 = x^3 + 3x - 2$ ، $y_2 = x^3 - 7x - 6$
و $y_3 = x^3 - 3x + 2$ به منحنیات ذیل نموده می شوند و علاوه
بر این معادله $x^3 + 3x - 2 = 0$ دارای یک ریشه است

و $x^3 - 7x - 6 = 0$ دارای سه ریشه و $x^3 + 3x + 2 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف ۱ و یک ریشه ساده ۲− است

۴۷۴ − بعضی از معرفات دارای تغییرات محدود هستند یعنی در آنها نمیتوان به x جمیع مقادیر ممکنه از $-\infty$ تا $+\infty$ را داد

مثال − میخواهیم تغییرات معرف $y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ را معلوم کنیم a اصلا مثبت است و معرف محقق نگردد مگر اینکه $\frac{a+x}{a-x} > 0$ یا $(a-x)(a+x) > 0$ یعنی وقتیکه x محصور باشد مابین $-a$ و $+a$ پس میتوان x را فقط در این فاصله تغییر داد

مشتق معرف میشود $y' = -\frac{x^2 - ax - a^2}{(a-x)\sqrt{a^2 - x^2}}$

مشتق و معرف بازاء $x = a$ منفصل میشوند و مشتق بازاء $x = -a$ منفصل و بازاء دو مقدار دیگر از x صفر میگردد ولیکن یکی از این دو مقدار فقط محصور است مابین $-a$ و $+a$ زیرا که اگر در $x^2 - ax - a^2$ بجای x متدرجاً

$-a$ و 0 و a قرار دهیم چنین نتیجه میشود پس فقط ریشهٔ منفی مفید خواهد بود $x_1 = \frac{a(1-\sqrt{5})}{2}$ و جدول ذیل تشکیل میگردد

x	$-a$		x_1		0		a
y	0	↘	y_1	↗	0	↗	$+\infty$
y'		−	0	+		+	

و مقدار مینیموم چنین میشود $y_1 = \frac{a}{2}(1-\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}$

و اگر بخواهیم منحنی معرف را رسم کنیم ملاحظه میکنیم که بازاء $x = 0$ و $y' = 1$ و بازاء $x = -a$ مقدار y' الی غیر النهایه است و خط مماس بر مبداء عبارت از منصف زاویهٔ اول محورها و خط مماس بر A موازیست با Oy پس منحنی $ABOC$ رسم میشود و اگر بخواهیم منحنی نمایش تغییرات $y = -x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ را رسم کنیم یک شاخه $ABOC'$ قرینهٔ شاخهٔ اول نسبت به محور x ها تشکیل میگردد و مجموع این دو شاخهٔ منحنی موسوم به استروفوئید را ترکیب میکند

۴۷۵ − **معرفات اولیه** − معرف اولیهٔ هر معرف مفروض $f(x)$ عبارتست از معرف دیگری که $f(x)$ مشتق آن باشد مثلاً چون $2x$ مشتق x^2 است پس x^2 را معرف اولیهٔ $2x$ گویند و میتوان بسهولت

ملتفت شد که هر معرف
$f(x)$ میتواند دارای
چندین معرف اولیه باشد
زیرا که اگر $f(x)$ مشتق
معرف $F(x)$ باشد
معرف $F(x)+C$ نیز که در آن C مقداریست ثابت دارای همان مشتق خواهد بود.
مثلاً $2x$ مشتق معرفات x^2 و x^2+4 و x^2-3 است پس این سه معرف عبارتند
از معرفات اولیهٔ $2x$

قضیه ۱ — مشتق مساحت سطحی — هرگاه معرف متصل $f(x)$ معلوم باشد و
منحنی آنرا رسم کنیم و فرض کنیم که S حاصل جمع جبری سطوحی باشد محصور ما بین منحنی مفروض
و محور ox و خط ثابتی موازی oy و خط متغیری موازی oy که ابسیس x
باشد و هر کدام از سطوح مسبوق بعلامت $+$ یا $-$ باشد بحسب آنکه در فوق
یا در تحت ox واقع شده باشد گوئیم که مشتق حاصل جمع S که معرف
x ملحوظ شود عبارت است از $f(x)$

برهان — فرض میکنیم ox و oy دو محور متعامده باشد و $ACDM$,

منحنی نمایش $y=f(x)$
خط ثابت AB و خط متغیر MP را که ابسیس x باشد یعنی $x=\overline{OP}$
بموازات oy رسم کنیم و چون ملاحظه کنیم حاصل جمع سطوح

$$S = \text{سطح } ABC - \text{سطح } CED + \text{سطح } DMP$$

محصوره ما بین منحنی و محور ox و دو خط AB و MP را بطوریکه سطوح
ABC و DMP واقعه در فوق ox مسبوق بعلامت $+$ باشند و سطح
CDE واقع در تحت ox مسبوق بعلامت $(-)$ ظاهراً حاصل جمع S
معرفیست از x ابسیس نقطه
پس از این مقدمه دو حالت منظور میآوریم

اولاً فرض میکنیم y اردونهٔ نقطهٔ M مثبت باشد و یک نمو مثبت Δx به x
میدهیم پس y نیز یک نمو Δy اختیار خواهد نمود و یک نقطهٔ جدیدی از منحنی بدست میآید
که مختصاتش عبارتند از $x+\Delta x$ و $y+\Delta y$ آنوقت بر حاصل جمع S سطح ذوزنقهٔ منحنیه

$MNQP$ فزوده میشود که باید با علامت $+$ گرفت چونکه واقعست در فوق
ox پس چنین خواهیم داشت $\Delta S = MNQP$ و خطوط MM'
و NN' را بموازات ox رسم بکنیم واضح است که سطح $MNQP$ محصور است
مابین سطوح دو مستطیل $MM'QP$ و $NN'PQ$ پس چنین خواهیم داشت

$$MP \times PQ < \Delta S < NQ \times PQ$$

و چون y مثبت است پس $MP = y$ ، $NQ = y + \Delta y$ و
$PQ = \Delta x$ و از آنجا چنین حاصل میشود $y\Delta x < \Delta S < (y+\Delta y)\Delta x$
و چون بر Δx قسمت کنیم چنین میشود $y < \frac{\Delta S}{\Delta x} < y + \Delta y$
وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر Δy نیز مایل شود بصفر چونکه y معرف اتصالی است از
x و بعد حد $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ محصور مابین y و $y + \Delta y$ که حدش y است
y خواهد بود لهذا معرف S دارای مشتق است مساوی y یعنی

$$\frac{dS}{dx} = y = f(x)$$

ثانیاً فرض بکنیم که y از دو نقطه M منفی باشد و باز یک نمو مثبت Δx
به x میدهیم و در اینحالت دو نقطه $M(x \text{ و } y)$ و $N(x+\Delta x \text{ و } y+\Delta y)$
واقعند در تحت ox و حاصل جمع S نیز یک نمو ΔS اختیار میکند

که مساوی است با ذوذنقه $MNQP$ با علامت $(-)$ یعنی
$\Delta S = -MNQP$ و باز در اینجا چنین خواهیم داشت
$MM'QP < MNQP < NN'PQ$ و لکن $MNQP = -\Delta S$
و $MM'QP = MP \times PQ = -y \cdot \Delta x$ ،
زیرا که $NN'PQ = NQ \times PQ = -(y + \Delta y)\Delta x$
y و $y + \Delta y$ چون منفی اند پس مساوی شوند با $-MP$ و $-NQ$
و از آنجا $-y\Delta x < -\Delta S < -(y + \Delta y)\Delta x$ و پس از
تغییر علامات چنین میشود $y\Delta x > \Delta S > (y + \Delta y)\Delta x$
و چون بر Δx قسمت کنیم میشود $y > \frac{\Delta S}{\Delta x} > y + \Delta y$
و $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ باز محصور است مابین y و $y + \Delta y$ و حدش میشود
y وقتیکه Δx میل کند بسمت صفر مختصراً در جمیع حالات S
دارای مشتق است مساوی با y یعنی $f(x)$

تبصره — معرف اولیه $f(x)$ را باین رمز مینمایند $\int f(x)\,dx$

بقسمی که از تساوی $F(x) = \int f(x)\,dx$ چنین مفهوم میشود که $F'(x) = f(x)$

یا اینکه $dF(x) = f(x)\,dx$ مثلا چنین مینویسیم

$x^2 = \int 2x\,dx$ و $x^3 = \int 3x^2\,dx$

انتگرال نامعین نامیده میشود $\int f(x)\,dx$

معرف اولیهٔ یک کثیر الجمله صحیح — اولاً معرف اولیه x^m این است

$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ درصورتیکه m مثبت باشد و کافی است که تحقیق کنیم

$\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = x^m$ ثانیاً معرف اولیه A است $Ax + C$

چونکه مشتق Ax میشود A ثالثاً معرف اولیه Ax^m این است

$A\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ چونکه $\left(A\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = A\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)' = Ax^m$

رابعاً معرف اولیه حاصل جمع چند جمله عبارت است از حاصل جمع معرفات

اولیهٔ آن جمل زیرا که فرض میکنیم $U' = u$ و $V' = v$ و $W' = w$ پس

$U' + V' + W' = u + v + w$ یا $(U+V+W)' = u + v + w$

پس معرف اولیه $u + v + w$ عبارتست از $U + V + W$

حاصل جمع معرفات اولیهٔ جمل

قضیه ۲ — هر معرف متصل $f(x)$ میتواند دارای یک عدهٔ لایتناهی از معرفات اولیه باشد که اختلافشان فقط در یک مقدار ثابت است

اولاً یک معرف اولیه لامحاله از $f(x)$ موجود است این حکم از قضیهٔ فوق نتیجه میشود زیرا که کافیست منحنی معرف $f(x)$ را رسم کنیم و ملاحظه کنیم حاصل جمع جبری S سطوح محصوره مابین منحنی و Ox و دو خط (یکی ثابت و دیگری متغیر) موازی با Oy را

این حاصل جمع S عبارتست از یک معرف اولیه از $f(x)$

ثانیاً فرض میکنیم $F(x)$ یک معرف اولیه از $f(x)$ باشد واضح است که $F(x) + C$ نیز که در آن C مقدار ثابت باشد عبارتست از یک معرف اولیه از $f(x)$ چونکه مشتق C صفر است و علاوه بر این اگر C جمیع مقادیر ممکنه را اختیار کند جمیع معرفات اولیه $f(x)$ حاصل میشوند زیرا که فرض میکنیم $\Phi(x)$ یک معرف اولیه از $f(x)$ باشد تفاضل $\Phi(x) - F(x)$ معرفیست از x که مشتقش این است

$f(x) - f(x) = 0$ پس این معرف ثابت است (نمرهٔ ۶۲۴ قضیهٔ ۱)

آنوقت چنین خواهیم داشت $\Phi(x) - F(x) = C$ یا $\Phi(x) = F(x) + C$

از آنچه مقدم شد چنین استنباط میشود که برای یافتن معرف اولیه یک کثیر الجمله باید
در هر جمله یک واحد بر نماینده x افزود و بعد این جمله را بر نماینده جدید
قسمت کرد مثلاً $\int (x^3+x^2)dx = \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$

و $\int\left(\frac{x^2}{2}+4\right)dx = \frac{x^3}{6}+4x+C$

و $\int(ax+b)dx = \frac{ax^2}{2}+bx+C$

$\int(ax^2+bx+c)dx = \frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$ ،

ساحت یک سطح مستوی — فرض میکنیم $f(x)$ معرفی از x باشد و یک معرف
اولیه $F(x)$ او را بشناسیم حاصل جمع مه سطوح محصوره ما بین منحنی
$y=f(x)$ و محور ox و خط AB موازی oy و خط MP که ابتیسش
x است موازی با oy نیز یک معرف اولیه از $f(x)$ می باشد پس از اینجا چنین
استنباط کنیم که اختلاف مه از $F(x)$ فقط در یک مقدار ثابت است یعنی
مه $= F(x)+C$ (۱) پس برای شناختن مه کافی است
که مقدار ثابت C را معلوم کنیم

واضح است که سطح مه صفر میشود وقتیکه نقطه M واقع شود در A یعنی وقتیکه x مساوی شود
با a ابتیس نقطه A پس اگر در تساوی (۱) بجای x مقدار a را قرار دهیم

چنین خواهیم داشت $0=F(a)+C$ و از آنجا $C=-F(a)$
و بعد مه $=F(x)-F(a)$ پس حاصل جمع مه سطوح محصوره ما بین منحنی
$y=f(x)$ و محور ox و دو خط موازی oy که ابتیسشان
a و b باشد مساوی است با نموی که از معرفات اولیه $f(x)$ وقتیکه
x از a تا b ترقی کند یعنی مه $=F(b)-F(a)$

مثال — حساب کنید ساحت ذوذنقه منحنیه محدود به منحنی $y=x^2+x+1$
و محور ox و محور oy و خط موازی با oy که ابتیسش ۱ باشد

ابتدا منحنی مفروض را رسم میکنیم
راسش نظیر است با ماکزیموم y
که مختصاتش چنین باشند
$\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ و یکی از معرفات
اولیه y است $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

و بعد ساحت سطح مه ذوذنقه منحنیه $OABC$ عبارت باشد از نمو
$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ وقتیکه x از صفر ابتیس A ترقی کند تا ۱ ابتیس B.
پس چنین حاصل میشود مه $= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0$ یا مه $=\frac{11}{6}$

امثله

۱- تغییرات معرفات ذیل را معلوم کنید $y=x^3(a-x)^2$

$y=(3x-1)(x-2)(3x+5)$ ، $y=x^4-2x^3+x^2-8$

$y=x^2(x-1)^3$ ، $y=x^3-3x+5$ ، $y=x^3-2x^2+x+1$

$y=\frac{2x-3}{x+1}$ ، $y=\frac{x^2-1}{4x-3}$ ، $y=\frac{4x^2-12x+5}{x^2-3x+2}$

$y=\frac{x^2-3x-1}{x-2}$ ، $y=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$ ، $y=\frac{3x^2-5x-4}{3x-1}$

۲- $y=x-\sqrt{4-x^2}$ ، $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x}$ ، $y=\sqrt{1-x^2}$

۳- تغییرات معرفات ذیل را معلوم کنید $y=\sin x+\cos x$

$y=\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ ، $y=2\,tg^3x+4\,tg\,x+1$ ، $y=x+\cos x$

$y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin 2x}$ ، $y=\frac{\sin x}{1+tg^2x}$

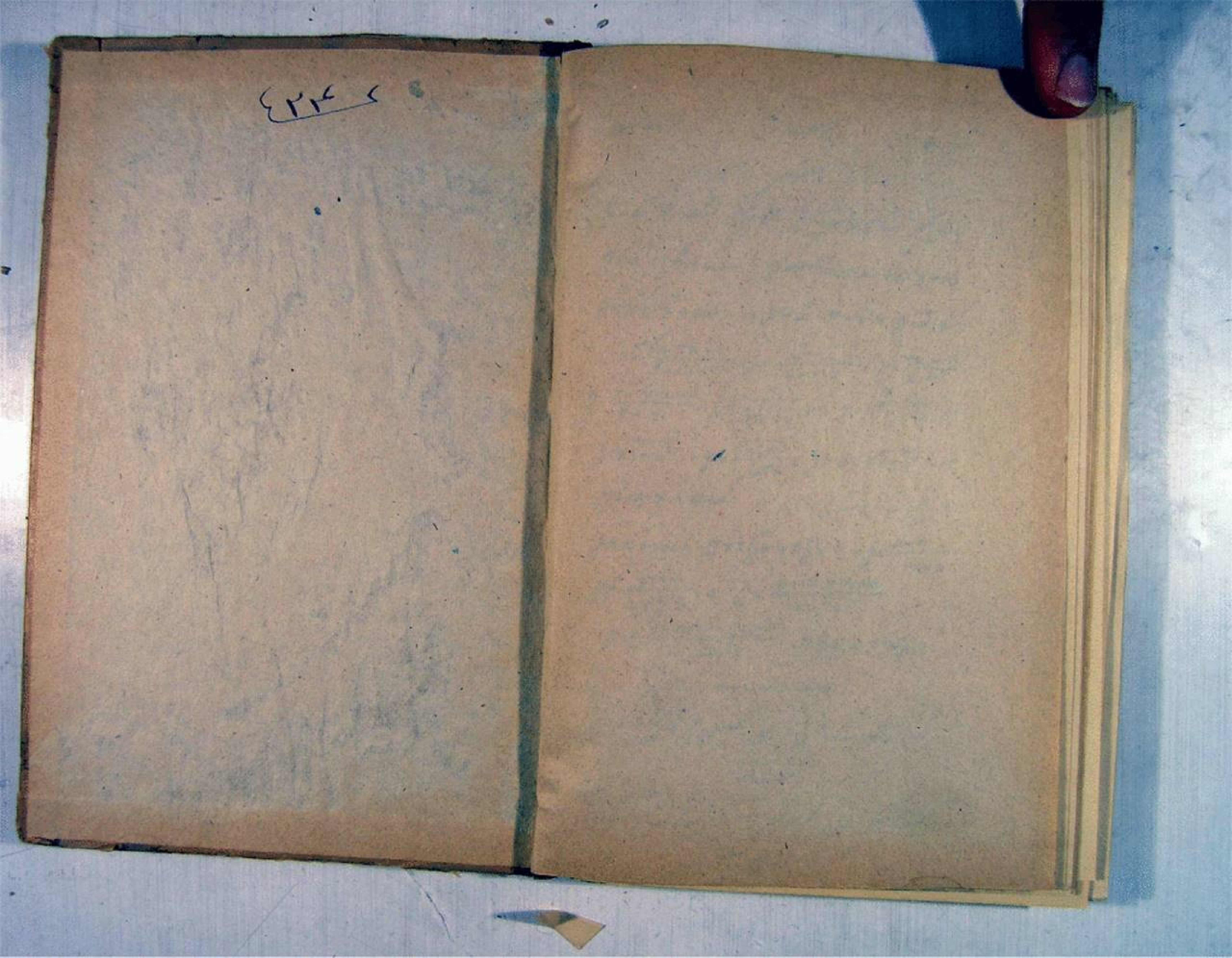
$y=tg\,x+3\,cotg\,x$ ، $y=\frac{3\sin x-4\cos x}{\cos^2 x}$

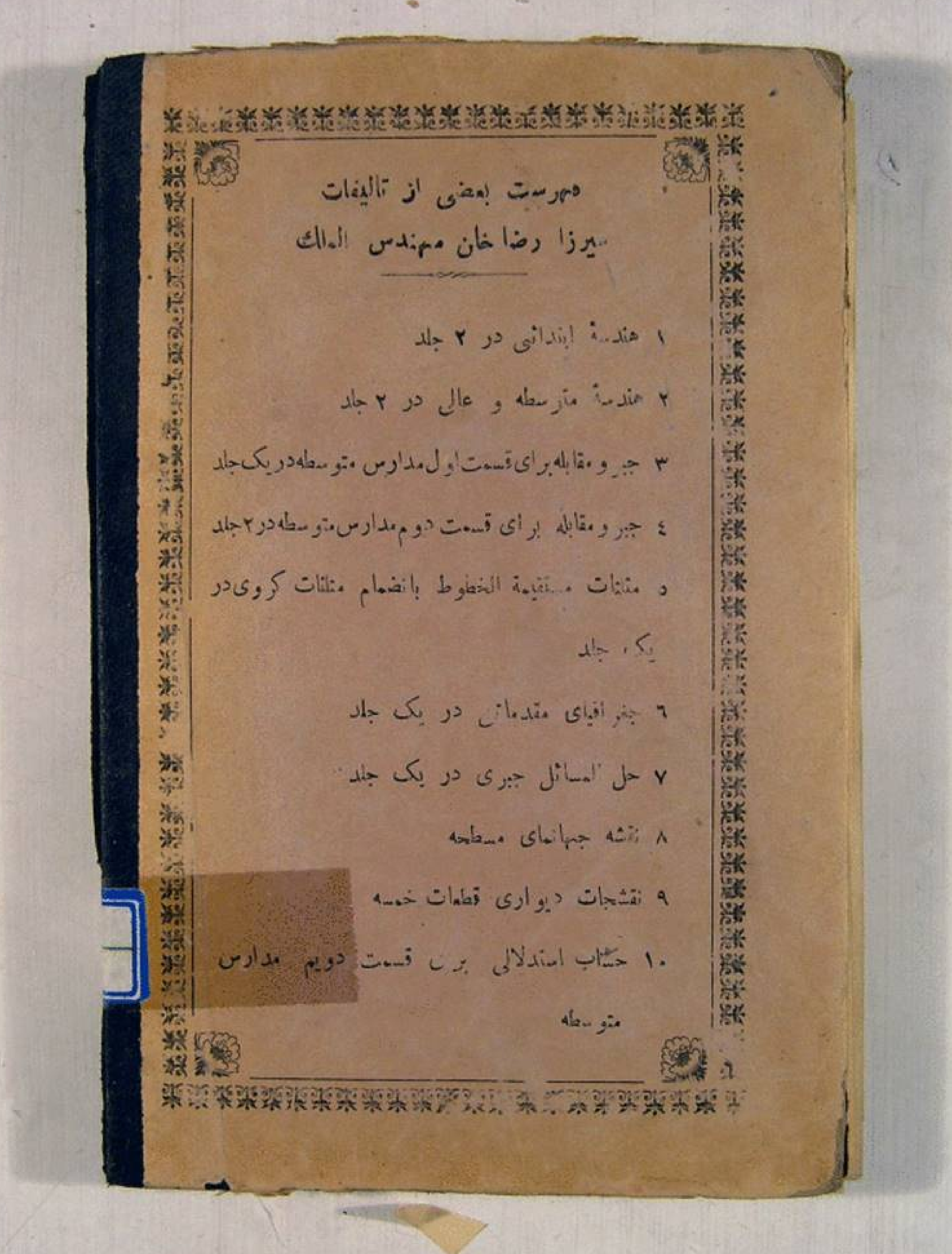
کتبه العبد المذنب الفانی مرتضی الحسینی البرغانی فی شهر جمادی الآخره

سنه ۱۳۳۴

در مطبعه استاد فرخنده اختر آقا میرزا علی اصغر بمعاونت آقا میرزا حسن آشتیانی زید عزهما

بزیور طبع آراسته شد





فهرست بعضی از تالیفات
میرزا رضا خان مهندس الملک

۱ هندسهٔ ابتدائی در ۲ جلد

۲ هندسهٔ متوسطه و عالی در ۲ جلد

۳ جبر و مقابله برای قسمت اول مدارس متوسطه در یک جلد

۴ جبر و مقابله برای قسمت دوم مدارس متوسطه در ۲ جلد

۵ مثلثات مستقیمة الخطوط بانضمام مثلثات کروی در یک جلد

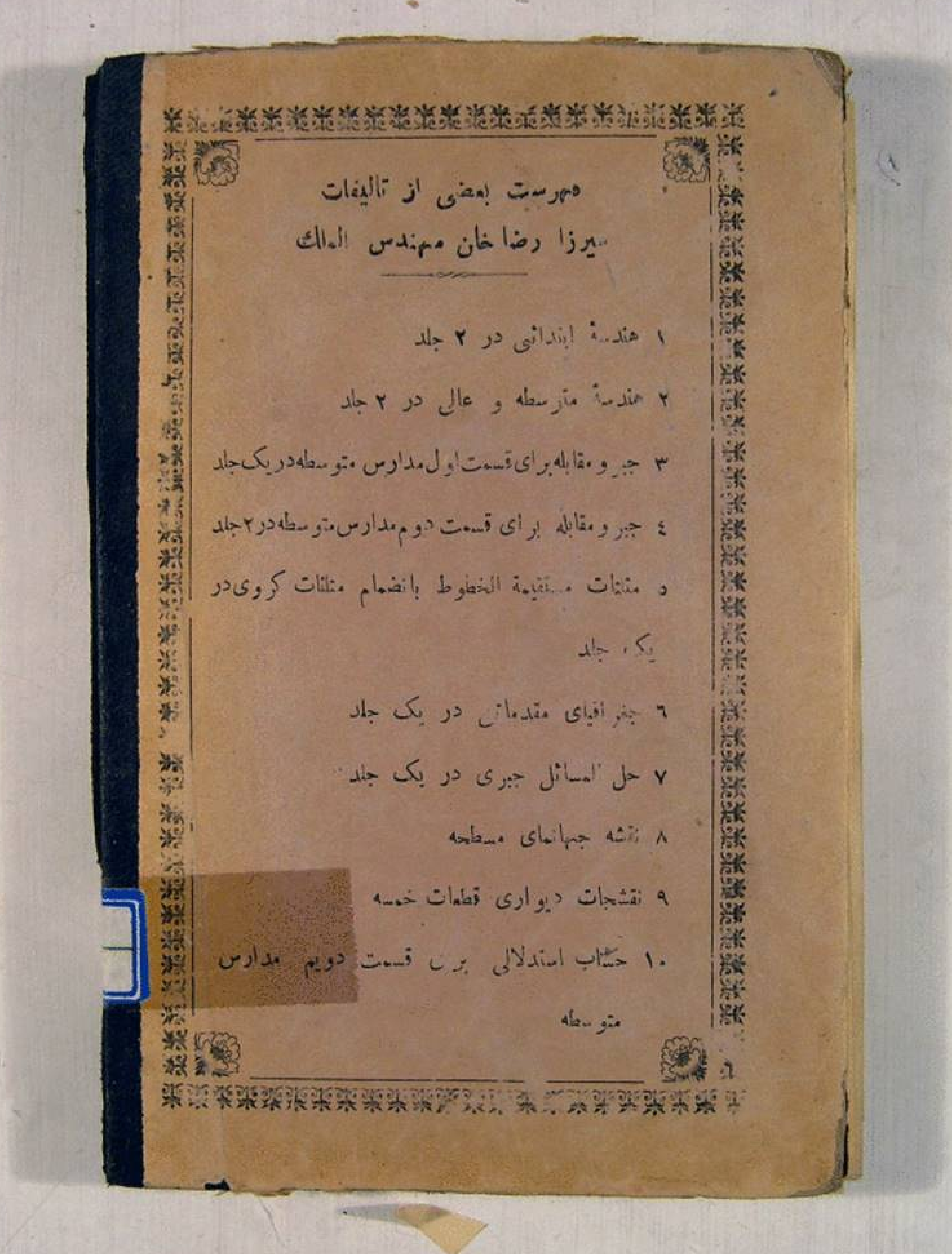
۶ جغرافیای مقدماتی در یک جلد

۷ حل المسائل جبری در یک جلد

۸ نقشه جهانمای مسطحه

۹ نقشجات دیواری قطعات خمسه

۱۰ حساب استدلالی برای قسمت دوم مدارس متوسطه



فهرست بعضی از تالیفات

میرزا رضاخان مهندس الملك

۱ هندسهٔ ابتدائی در ۲ جلد

۲ هندسهٔ متوسطه و عالی در ۲ جلد

۳ جبر و مقابله برای قسمت اول مدارس متوسطه در یک جلد

٤ جبر و مقابله برای قسمت دوم مدارس متوسطه در ۲ جلد

۵ مثلثات مستقیمة الخطوط بانضمام مثلثات کروی در یک جلد

٦ جغرافیای مقدماتی در یک جلد

۷ حل المسائل جبری در یک جلد

۸ نقشه جهانمای مسطحه

۹ نقشجات دیواری قطعات خمسه

۱۰ حساب استدلالی برای قسمت دویم مدارس متوسطه